Peter Koppelstätter

Rechenbeispiele für die Arithmetica Localis von John Napier

Die Arithmetica Localis

Die Arithmetica Localis ist ein Rechenverfahren mittels Bewegen von Rechensteinen auf einer schachbrettartigen Unterlage (zweidimensionales Rechenbrett). Voraussetzung für dieses Rechnen ist, dass die Zahlen mit denen gerechnet wird, in Zweierpotenzen zerlegt sind.

Zahlen werden in Zweierpotenzen zerlegt.

Da die gebräuchlichen Zahlen alle im Zehnersystem gebildet waren, transferierte Napier zuerst die Zahlen in ein Zweiersystem, wobei für jede einzelne Zweierpotenz ein Buchstabe steht. Dazu stellte Napier zwei mögliche Verfahren dar.

Subtraktionsverfahren
Napier hat eine Umrechnungsleiste angelegt, die aufsteigend alle Zweierpotenzen enthielt und benannte jede Zweierpotenz mit einem Buchstaben. Er begann dabei mit lateinischen Buchstaben, fuhr aber, soweit das lateinische Alphabet nicht ausgereicht hat mit griechischen Buchstaben fort. Er selbst stellt die Umrechnung von Dezimalzahlen in Zweierpotenzen (er nennt diese Zahlen numeri locales, häufig übersetzt mit „Ortszahlen") an Hand der Jahreszahl 1611 dar. Daraus könnte auf das Entstehungsdatum der arithmetica localis geschlossen werden, unabhängig davon, dass die Rabdologie erst 1617 veröffentlicht worden ist.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	…
1	2	4	8	16	32	64	12 8	25 6	51 2	102 4	204 8	409 6	…

Die Zahl 1611 wird im Subtraktionsverfahren wie folgt in Zweierpotenzen zerlegt:

1611	
- 1024	= l
587	
- 512	= k
75	
- 64	= g
11	
- 8	= d
3	
- 2	= b
1	
- 1	= a

Die Zahl $1611_{(10)}$ wird durch die Buchstabenfolge lkgdba repräsentiert.

Divisionsverfahren

Die gegebene Dezimalzahl wird fortlaufend durch 2 dividiert. Ist die gegebene Zahl (bzw. der Restwert) ungerade, dann ist der entsprechende Buchstabe besetzt und es wird 1 abgezogen, bevor weiter durch 2 dividiert wird. Ist die Zahl (bzw. der Restwert) gerade, ist der zugehörige Buchstabenwert nicht besetzt.

Beispiel:

1611	ist ungerade, der Buchstabe a ist besetzt	a
(1611 – 1) / 2 = 805	ist ungerade, der Buchstabe b ist besetzt	b
(805-1) / 2) = 402	ist gerade, der Buchstabe c ist nicht besetzt	
402 / 2 = 201	ist ungerade, der Buchstabe d ist besetzt	d
(201 – 1) / 2 = 100	ist gerade, der Buchstabe e ist nicht besetzt	
100 / 2 = 50	ist gerade, der Buchstabe f ist nicht besetzt	
50 / 2 = 25	ist ungerade, der Buchstabe g ist besetzt	g
(25 – 1) / 2 = 12	ist gerade, der Buchstabe h ist nicht besetzt	
12 / 2 = 6	ist gerade, Buchstabe i ist nicht besetzt	
6 / 2 = 3	ist ungerade, der Buchstabe k ist besetzt	k
(3 – 1) / 2 = 1	ist ungerade, der Buchstabe l ist besetzt	l

Ein mit der arithmetica localis ermitteltes Ergebnis konnte auf zwei mögliche Arten wieder ins Dezimalsystem gebracht werden.

Additionsmethode
Die den Buchstaben zugeordneten Werte sind zu addieren:

a = 1
b = 2
d = 8
g = 64
k = 512
l = 1024
1611

Verdopplungsmethode
Begonnen wird mit dem höchsten besetzten Buchstaben und einer Verdopplung der 1.
Weiter wird in Richtung Anfang des Alphabets fortgefahren, wobei jeweils zum verdoppelten Ergebnis 1 addiert wird, wenn der nächste Buchstabe besetzt ist.

Buchstaben-reihe	Gegebene Zahl	Rechnung		Ergebnis
l	l	1 * 2	+ 1 weil k besetzt ist	3
k	k	3 * 2	+ 0 weil i nicht besetzt ist	6
i		6 * 2	+ 0 weil h nicht besetzt ist	12
h		12 * 2	+ 1 weil g besetzt ist	25
g	g	25 * 2	+ 0 weil f nicht besetzt ist	50
f		50 * 2	+ 0 weil e nicht besetzt ist	100
e		100 * 2	+ 1 weil d besetzt ist	201
d	d	201 * 2	+ 0 weil c nicht besetzt ist	402
c		402 * 2	+ 1 weil b besetzt ist	805
b	b	805 * 2	+ 1 weil a besetzt ist	1611
a	a			

Verkürzen und Erweitern der Zahlenschreibweise

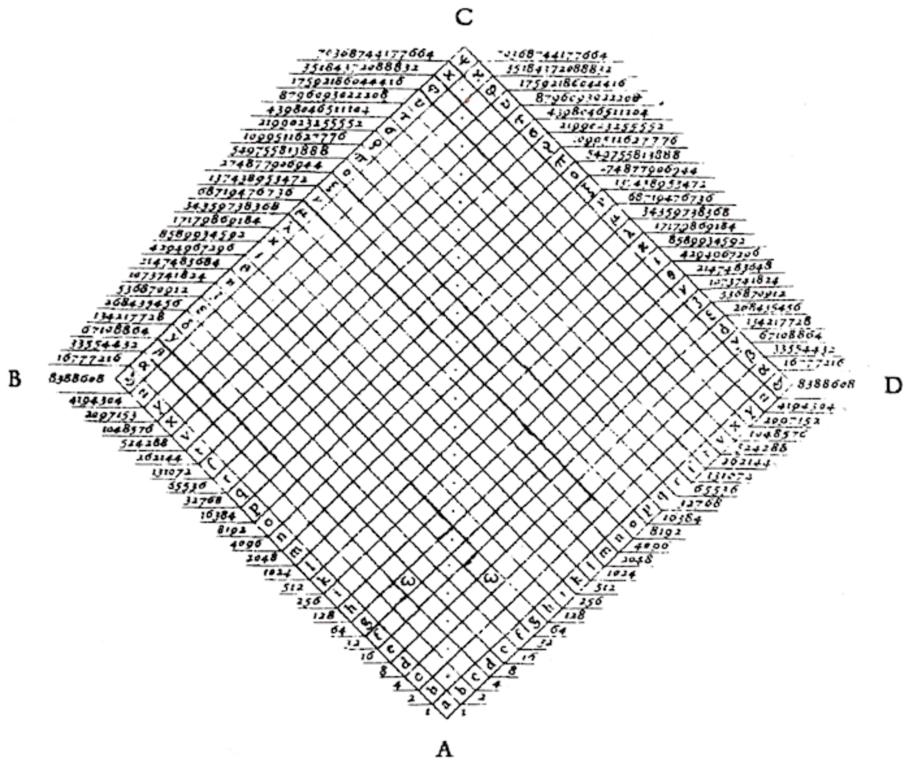
Die Zahl lkgdba (1611) kann durch Ersetzen von Buchstaben durch Buchstaben mit geringerem Wert (z. B. hat l den doppelten Wert von k) erweitert werden:

Beispiel:

lkgdba = kkkgccba

Entsprechend können Zahlen, die sich bei einer Rechnung ergeben haben, auch verkürzt werden. Die Schreibweise korrespondiert mit der Anordnung der Rechensteine auf dem Rechenbrett.

Aufbau des Rechenbretts



Rechenbrett mit einer Randlänge von 24 Feldern aus Napier J.: Rabdology. Translated by W. F. Richardson, MIT Press and Tomash Publishers, 1990 (Charles Babbage Institute, reprint series for the history of computing, Volume 15)

Beginnend in Ecke A werden die Felder bis zur Ecke C mit Buchstaben benannt, wobei die gleiche Buchstabenfolge sowohl auf dem Weg über B als auch über D verwendet wird. Die Felder der Mittelsenkrechten (A bis C) werden mit Punkten gekennzeichnet. Napier gab nicht zwangsläufig eine feste Größe vor (Kantenlänge 24 Felder, 576 Felder insgesamt), er sprach auch von Rechenbrettern mit anderer Kantenlänge z. B. mit Kantenlänge 16 Felder und insgesamt 256 Felder. Das Rechenbrett muss nur immer groß genug sein, um die notwendigen Rechenvorgänge unterstützen zu können. Zum Rechnen sollen Rechensteinchen auf das Rechenbrett gesetzt werden. Der Wert der Rechensteinchen leitet sich von den am Rand des Rechenbretts angeschriebenen Buchstaben ab.

Rechenregeln

Wird ein Rechenstein parallel zum Rand des Rechenbretts bewegt (wie ein Turm im Schach) erhöht sich sein Wert pro Feld um das Doppelte, bzw. verringert sich auf die Hälfte.

Wird ein Rechenstein waagrecht (diagonal zu den Rändern, wie ein Läufer beim Schach) bewegt d. h. er bewegt sich zwischen zwei Feldern, die mit gleichem Buchstaben benannt sind, bleibt sein Wert gleich.
Wird ein Rechenstein senkrecht (diagonal zu den Rändern wie ein Läuferzug) bewegt, vervierfacht sich sein Wert pro Feld auf dem Weg von unten nach oben, bzw. reduziert sich der Wert auf ein Viertel pro Feld auf dem Weg von oben nach unten.

Ein Rechenstein kann durch zwei andere Rechensteine ersetzt werden, ohne dass sich der Wert ändert, wenn sie eine waagrechte Linie (Läuferlinie) näher zu A liegen.
Beispiel: Ein Rechenstein auf der Linie von f zu f kann durch zwei Rechensteine auf der Linie von e zu e ersetzt werden.

Eine Multiplikation eines Werts am Rand AB mit einem Wert am Rand AD erfolgt durch Setzen eines Rechensteins auf die Schnittlinie die sich ergibt, wenn von jedem Wert am Rand eine Linie entsprechend dem Zug eines Turms in Richtung gegenüberliegendem Rand gezogen wird.
Beispiel:
Das Ergebnisfeld der Multiplikation von g * d ist in oben dargestellten Rechenbrett mit ω markiert.
d = 8 g = 64
ω liegt auf der Verbindungslinie von k (am Rand AD) zu k (am Rand von AB).
k = 512

Jedem Feld auf dem Rechenbrett sind drei Buchstaben zugeordnet:
Zwei Buchstaben ergeben sich durch eine Linie zu den Rändern AB und AD, die parallel zu einem Rand gezogen wird (entsprechend Turmzug) und der dritte Buchstabe (= zwei gleiche Buchstaben) ergibt sich durch eine waagrecht gezogene Linie (entsprechend Läuferzug).

In obigem Beispiel sind dem Feld ω die Buchstaben d, g und k zugeordnet. Des Weiteren können (bei einer Multiplikation) die Buchstaben d und g als Faktoren und k als Produkt bezeichnet werden. Entsprechend (bei einer Division) können k als Dividend und d und g als Divisor und Quotient benannt werden.

Rechnen mit Hilfe des Rechenbretts

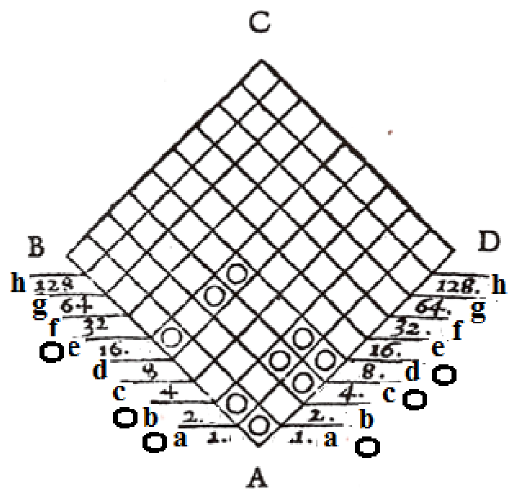
Multiplikation

Bei einer Multiplikation muss das Rechenbrett so ausgelegt sein, dass ein Faktor weniger als das Doppelte des Werts an der Ecke B bzw. D ist.
Jeder Wert des einen Faktors muss mit jedem Wert des anderen Faktors durch „Turmlinien“ verbunden werden, wobei auf die Schnittpunkte jeweils Rechensteine gesetzt werden. Die Summe aller dann liegenden Rechensteine ergibt das Produkt.

Beispiel: 19 * 13 = 247

Die Zahl 19 entspricht den Buchstaben e (16), b (2) und a (1). Es werden deshalb als Markierung außerhalb des Rechenbretts an den Rand AB bei e, b und a Rechensteine gelegt.
Die Zahl 13 entspricht den Buchstaben d (8), c (4) und a (1). Es werden deshalb außerdem als Markierung außerhalb des Rechenbretts an den Rand AD bei d, c und a Rechensteine gelegt.

Von jedem Rechenstein wird eine Turmlinie über das Rechenbrett gezogen. Dabei schneiden sich die Turmlinien von jedem für den ersten Faktor gelegten Rechenstein am Rand mit den Turmlinien, die von den Rechensteinen des anderen Faktors ausgehen. Auf jedes Schnittpunktfeld wird ein Rechenstein auf das Rechenbrett gelegt. Alle Rechensteine auf dem Rechenbrett werden addiert und ergeben zusammen das Produkt.



Die Werte der Rechensteine auf dem Rechenbrett ergeben:

Linie h	1 Rechenstein	128
Linie g	1 Rechenstein	64
Linie f	-	
Linie e	2 Rechensteine	32
Linie d	2 Rechensteine	16
Linie c	1 Rechenstein	4
Linie b	1 Rechenstein	2

Linie a	1 Rechenstein	1
		247

Mathematischer Hintergrund

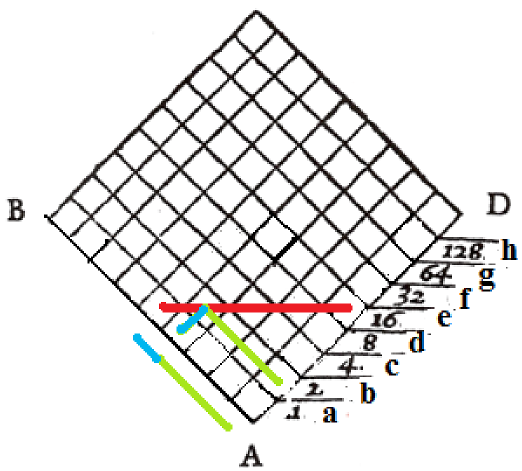
Napier zerlegt die Zahlen in ihre Zweierpotenzen. D. h. eine Zahl z. B.
1611 =

1	2	8	64	512	1024	
2^0	2^1	2^3	2^6	2^9	2^{10}	
a	b	d	g	k	l	

Eine Multiplikation einer Zahl mit einer zweiten Zahl kann auf eine Addition zurückgeführt werden, wenn sie als Potenz mit gleicher Basiszahl geschrieben werden. Denn die Addition der Potenzen entspricht dann der Multiplikation der Zahlen.

$8 * 64 = 2^3 * 2^6 = 2^{(3+6)} = 2^9 = 512$

Auf der arithmetica localis werden nur die Potenzen abgebildet und die Addition der Potenzen (bzw. die Subtraktion der Potenzen bei der Division von Zahlen) werden durch geometrische Bewegungen ausgeführt. Durch das Setzen und Bewegen von Rechensteinen auf dem Rechenbrett kann die Addition / Subtraktion wie im folgenden Bild dargestellt ausgeführt werden.



In diesem Beispiel ist die Rechnung $2^1 * 2^3 = 2^{(1+3)} = 2^4 = 16$ durch graphische Addition der Potenzen dargestellt. Der erste Faktor ist 1 Feld vom Anfangsfeld entfernt. Der zweite Faktor ist 3 Felder vom Anfangsfeld entfernt. Das Ergebnis ist 4 Felder vom Anfangsfeld entfernt. Alle Felder auf der roten Linie sind – bei Bewegen wie ein Läufer auf einem Schachbrett – 4 Felder vom Anfangsfeld entfernt.

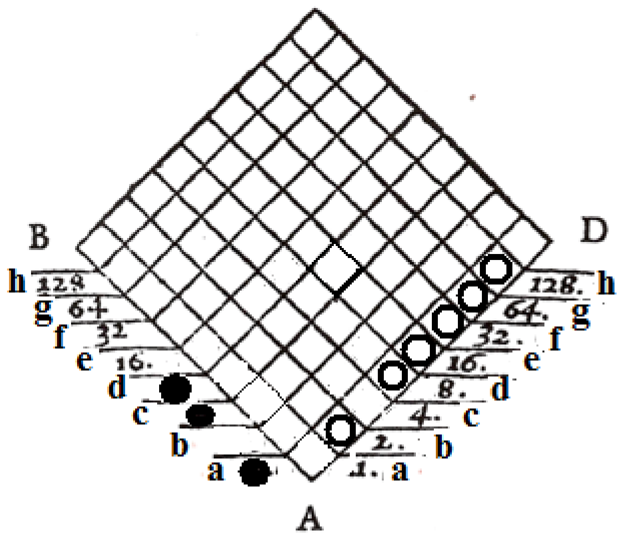
Eine Zahl wird auf der Arithmetica Localis als Summe von Zweierpotenzen dargestellt. Die Zahl 19 entspricht der Summe e+b+a (e=16, b=2, a=1). Die Zahl 13 entspricht der Summe d+c+a (d=8, c=4, a=1). Die Multiplikation eba * dca wird entsprechend dem Distributivgesetz dadurch ausgeführt, dass jeder Summand des ersten Faktors mit jedem Summanden des zweiten Faktors zu multiplizieren ist:

(e+b+a) * (d+c+a) = ed + ec + ea + bd + bc + ba + ad + ac + aa

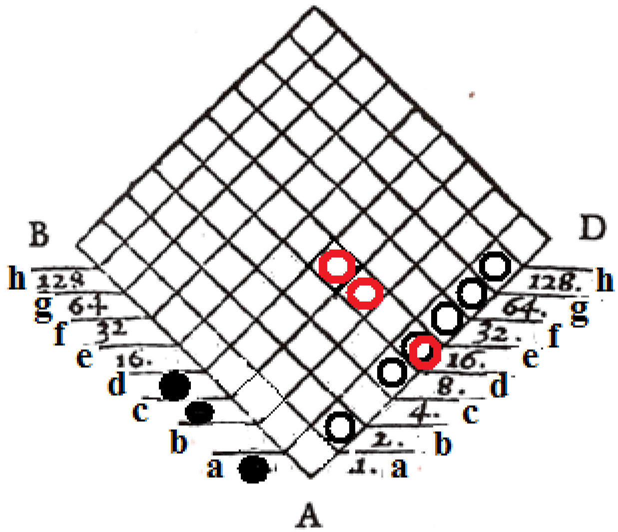
Division

Der Dividend wird auf das Rechenbrett an den Rand AD, der Divisor außerhalb des Rechenbretts an den Rand AB gelegt. Vom höchsten Wert des Dividenden wird eine Läuferlinie gezogen. Vom höchsten Wert des Divisors wird eine Turmlinie gezogen. Der Schnittpunkt dieser beiden Linien wird mit einem Rechenstein markiert. Von diesem Punkt aus wird parallel zur Linie AB für jeden Rechenstein des Divisors ein Rechenstein gelegt. Die so gelegten Rechensteine werden vom Dividenden abgezogen und außerdem ist der Wert am Rand AD, auf den diese Linie trifft, der erste Teilwert des Ergebnisses. Sollte das Subtrahieren nicht möglich sein, weil der Dividend zu klein ist, werden die gelegten Rechensteine um ein Feld parallel zum Rand AB verschoben und dann vom Dividenden abgezogen, entsprechend ist der Teilwert des Ergebnisses kleiner. Vom Dividenden bleibt ein Rest, mit dem genauso wie vorher mit dem Dividenden weitergerechnet wird, bis entweder kein Rest mehr bleibt oder der Rest kleiner als der Divisor ist. Schließlich werden alle Teilergebnisse addiert und ergeben den Quotienten.

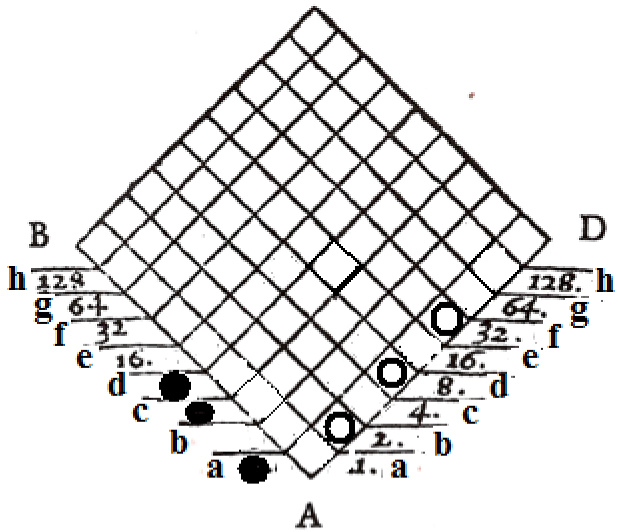
Beispiel: 250 / 13 = 19 Rest 3



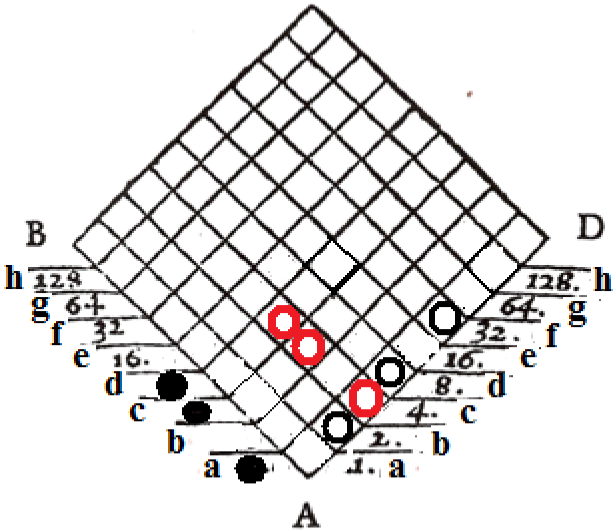
Dividend (h,g,f,e,d,b) auf dem Rechenbrett am Rand AD, Divisor (d,c,a) außerhalb am Rand AB



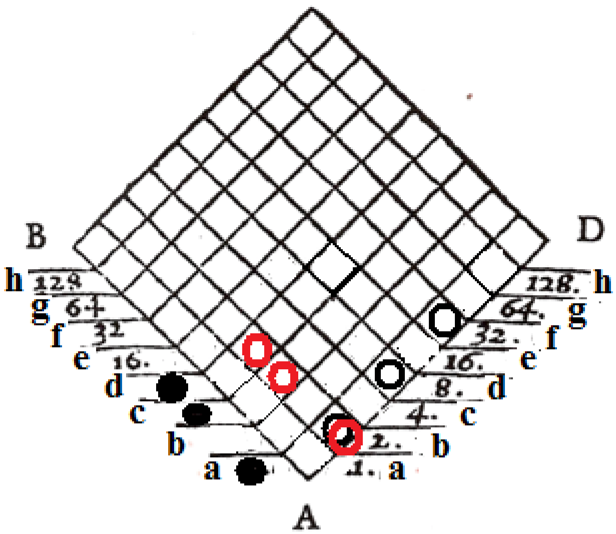
Die Turmlinie des höchsten Rechensteins des Divisors (d) wird mit der Läuferlinie des höchstens Werts des Dividenden (h) geschnitten. Von diesem Punkt aus wird für jeden Rechenstein des Divisors ein Rechenstein parallel zu AB gelegt. Die so gelegten Rechensteine (rot) werden durch waagrechtes Verschieben und Entfernen gleicher Werte des Dividenden vom Dividenden abgezogen, dabei ist der Wert e (16) der erste Teilwert des Ergebnisses, weil die roten Rechensteine an dieser Stelle auf den Rand AD treffen.



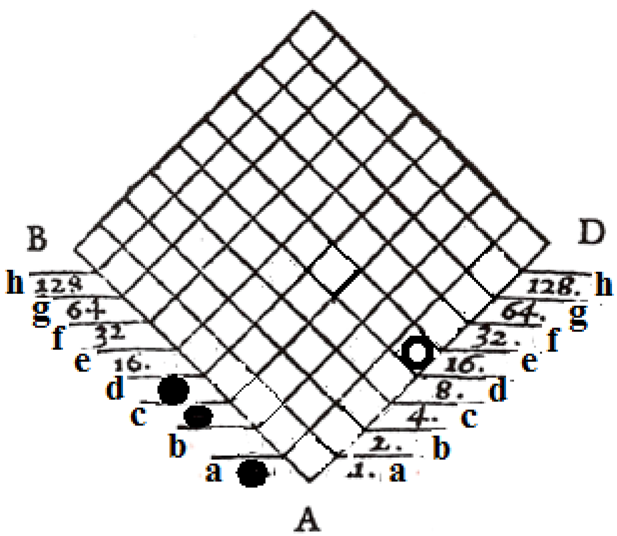
Die Turmlinie vom höchsten Wert des Divisors (d) wird jetzt mit der Läuferlinie des höchsten Werts des Dividenden geschnitten. Von dieser Stelle wird für jeden Rechenstein des Divisors ein Rechenstein parallel zum Rand AB gelegt.



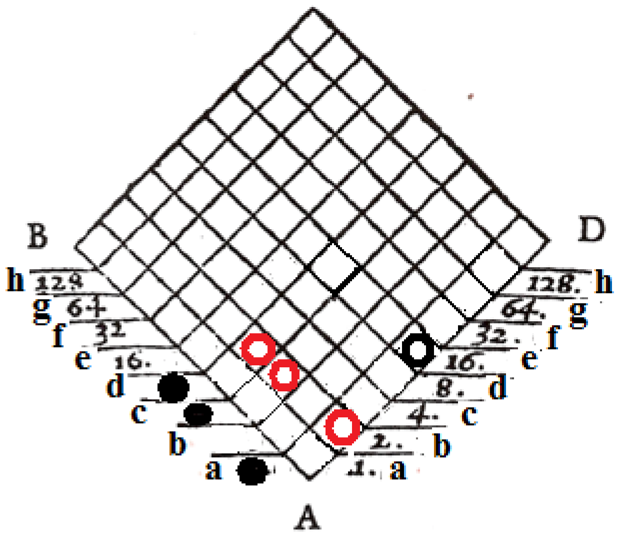
Die roten Rechensteine können nicht vom Rest(dividenden) abgezogen werden, weil ihr Gesamtwert größer als der Dividend ist. Deshalb werden die roten Rechensteine um ein Feld parallel zu AB verschoben.



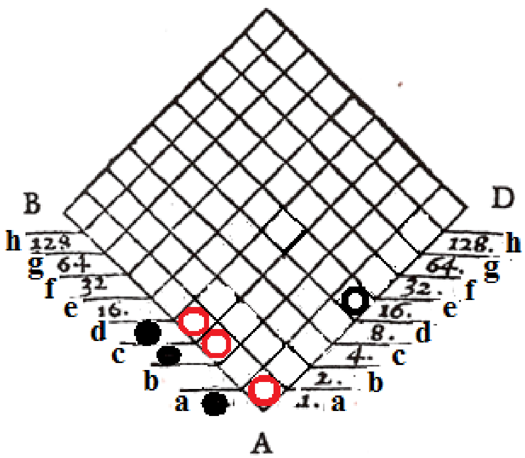
Die roten Rechensteine werden vom Rest(dividenden) subtrahiert, außerdem markiert die Linie der roten Rechensteine am Rand AD den zweiten Teilwert (b bzw. 2) des Ergebnisses.

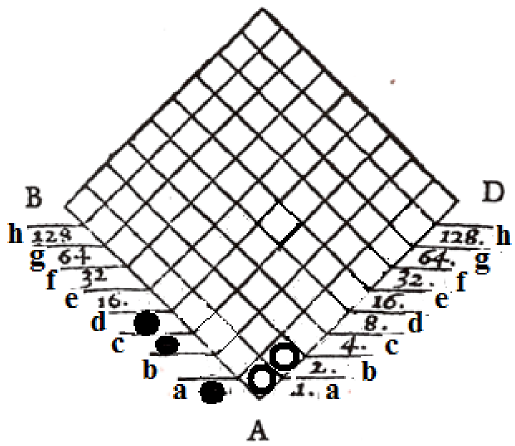


Die Läuferlinie vom jetzt noch einzigen (und damit höchsten) Rechenstein des Dividenden wird jetzt mit der Turmlinie des höchsten Werts des Divisors geschnitten. Von diesem Punkt aus werden parallel zum Rand AB für jeden Rechenstein des Divisors Rechensteine gelegt.



Die drei roten Rechensteine ergeben jedoch einen größeren Wert als der Rest(dividend) und können deshalb nicht abgezogen werden. Deshalb werden sie um ein Feld parallel in Richtung Rand AB verschoben und vom Rest(dividenden) abgezogen. Der dritte Teilergebniswert ist damit a bzw. 1.





Es bleiben auf dem Rechenbrett zwei Rechensteine des Dividenden noch stehen (a = 2^0= 1, und b=2^1= 2). Diese beiden Rechensteine bilden den Rest der Division (Rest = 3). Außerdem werden die drei Teilergebnisse der Division (16 + 2 + 1) addiert und ergeben den Quotienten 19.

Mathematischer Hintergrund

Dividend und Divisor sind jeweils in Zweierpotenzen aufgeteilt worden:

Dividend = 250 = h+g+f+e+d+b (h=128 = 2^7, g=64=2^6, f=32=2^5, e=16=2^4, d=8=2^3, b=2=2^1)

Divisor = 13 = d + c + a (d=8=2^3, c=4=2^2, a=1=2^0)

Bei der Division wird blockweise ausprobiert, wie oft der Divisor vom Dividenden abgezogen werden kann. Anders ausgedrückt, es wird nach und nach der Wert für den Quotienten gesucht, mit dem der Divisor maximal multipliziert werden kann, ohne dass das Ergebnis den Wert des Dividenden übersteigt.

$(2^7+2^6+2^5+2^4+2^3+\quad 2^1\quad) : (2^3+2^2+\quad 2^0) = 2^4$ (erstes Teilergebnis $\underline{2^4}$)

$\underline{2^7+2^6 \quad\quad 2^4}$ $\quad\quad (\underline{2^4}*2^3) + (\underline{2^4}*2^2) + (\underline{2^4} * 2^0)$

$2^5 \quad +2^3+ \quad\quad 2^1$ $\quad\quad$ verbleibendes Ergebnis der ersten Subtraktion

$2^5 + 2^4 + 2^2$ $\quad\quad (2^2 * 2^3) + (2^2 * 2^2) + (2^2 * 2^0)$

Abzug ist nicht möglich, weil der Dividend zu klein ist

deshalb nächster Versuch für einen Abzug

$2^5 \quad +2^3+ \quad\quad 2^1$ $\quad\quad$ verbleibendes Ergebnis der ersten Subtraktion

$\underline{\quad 2^4 \quad +2^3 + \quad\quad 2^1}$ $\quad\quad (\underline{2^1} * 2^3) + (\underline{2^1} * 2^2) + (\underline{2^1} * 2^0)$

$(2 * 2^4) - 2^4 + 2^3 - 2^3 + 2^1 - 2^1$ $\quad\quad$ (zweites Teilergebnis $\underline{2^1}$)

2^4

$\underline{2^3+ \quad 2^2+ \quad 2^0}$ $\quad\quad (\underline{2^0} * 2^3) + (\underline{2^0} * 2^2) + (\underline{2^0} * 2^0)$

$(2 * 2^3) - 2^3 - 2^2 - 2^0$ $\quad\quad$ (drittes Teilergebnis $\underline{2^0}$)

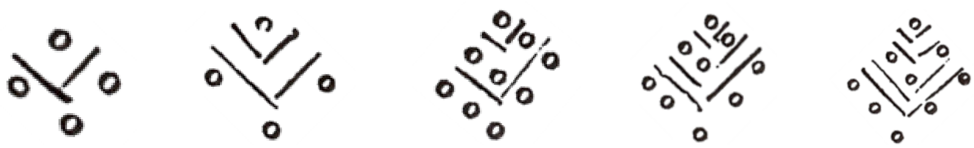
Rest: $2^3 - 2^2 - 2^0 = (2 * 2^2) - 2^2 - 2^0 = 2^2 - 2^0 = (2 * 2^1) - 2^0 = (2 * 2 * 2^0) - 2^0 = (4 * 2^0) - 2^0 =$

$3 * 2^0 = 3_{(10)}$

Quotient $= 2^4 + 2^1 + 2^0 = 19_{(10)}$

Ziehen der Quadratwurzel

An den Rand AD werden Rechensteine außerhalb des Rechenbretts für die Werte des Radikanden als Merker angelegt. Dann wird auf der Mittelsenkrechten ein Rechenstein auf das Feld gelegt, dessen Wert gerade noch vom Radikanden abgezogen werden kann. Napier nennt dieses Feld „head of the gnomons“ (was häufig mit Kopfstein übersetzt wird). Ein gnomon ist ein durch Rechensteine gebildetes Quadrat auf dem Rechenbrett, wobei der oberste Rechenstein der Kopfstein ist.



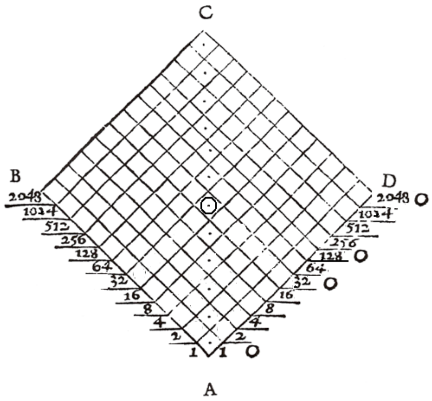
Beispiele für gnomons

Der Kopfstein wird vom Radikanden abgezogen. Im Weiteren wird das erste gnomon durch Anlegen von drei weiteren Rechensteinen an den Kopfstein gebildet. Der Wert der drei angelegten Rechensteine muss gerade noch vom (Rest)-Radikanden abgezogen werden können. Nachdem die Subtraktion erfolgt ist, wird das nächste gnomon gelegt. Dazu werden 5 Rechensteine verwendet. Das Anlegen von gnomons und das Subtrahieren der Werte werden solange fortgesetzt, bis kein Rest mehr verbleibt bzw. der Rest zu klein ist, um die Werte aus weiteren gnomons abzuziehen. Die letztlich durch die gnomons parallel zum Rand AD entstandenen Reihen zeigen auf Felder am Rand AB. Die Werte dieser Felder werden addiert und ergeben das Ergebnis der Wurzelrechnung.

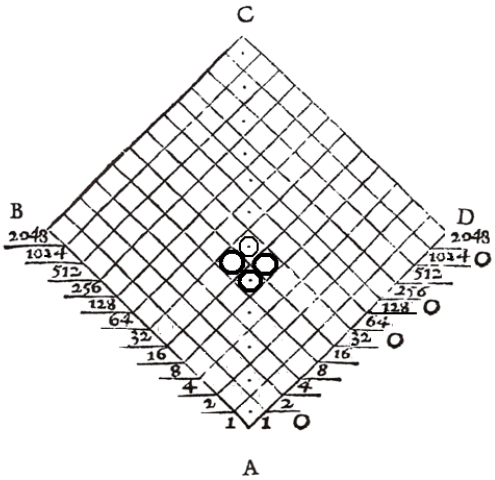
Beispiel 1:

Wurzel aus 2209 = 47 ohne Rest

Die Zahl 2209 wird in Zweierpotenzen zerlegt. Es ergeben sich folgende Werte:
2048 (m) + 128 (h) + 32 (f) + 1 (a). Entsprechende Rechensteine werden außen an den Rand AD gelegt. Der höchste auf der Mittelsenkrechten belegbare Wert, der gerade noch von 2048 abzuziehen ist, ist 1024. Das nächsthöhere Feld auf der Mittelsenkrechten hat den Wert 4096 (4-facher Wert von 1024).

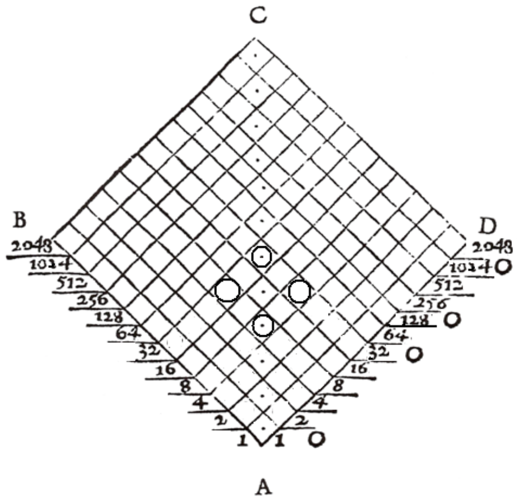


Der Wert des gesetzten Rechensteins (Kopfstein) wird vom Radikanden abgezogen. Es verbleibt ein erster Restradikand von 1024, 128, 32 und 1.

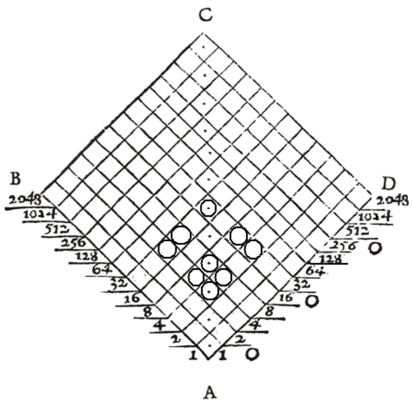


Dargestellt ist der erste Versuch für die Bildung eines gnomons. Die Werte der drei neuen Rechensteine (512, 512 und 256) können aber nicht vom Restradikanden abgezogen werden, weil der Restradikand zu klein ist. Deshalb rücken die drei neuen Rechensteine soweit nach außen, bis ein gnomon entsteht, das gerade noch vom Restradikanden abgezogen werden kann.

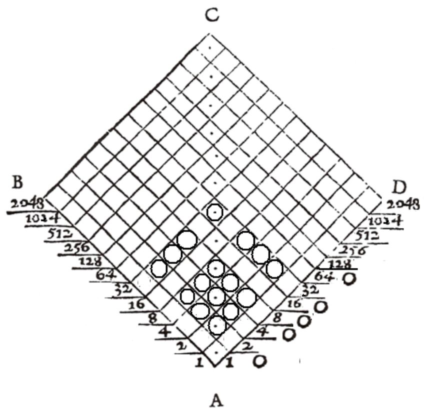
Das größte gnomon, das vom ersten Restradikanden abgezogen werden kann, ist 256 + 256 + 32.



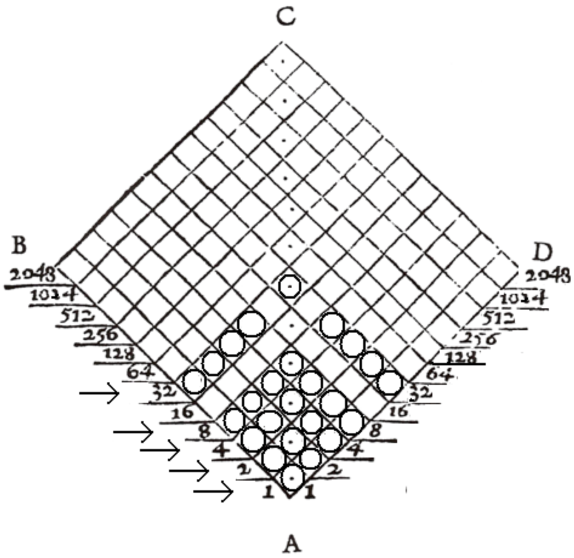
Die Werte der drei neu gelegten Rechensteine werden vom ersten Restradikanden abgezogen. Es ergibt sich folgender zweiter Restradikand: 512 + 64 + 32 + 1.
Um das erste gnomon wird jetzt das zweite gnomon mit 5 Rechensteinen gelegt, so dass die Werte der 5 neuen Rechensteine gerade noch vom zweiten Restradikanden abgezogen werden können. Es ergeben sich folgende Werte für die 5 neuen Rechensteine des zweiten gnomons: 128 + 128 + 32 + 32 + 16. Die Subtraktion dieser Werte vom zweiten Restradikanden ergibt folgenden dritten Restradikanden:
256 + 16 + 1



Das dritte gnomon wird mit 7 Rechensteinen um das zweite gnomon gelegt, wobei die Summe der 7 Rechensteine gerade noch vom dritten Restradikanden abgezogen können werden muss. Die Rechensteine mit den Werten 64 + 64 + 16 + 16 + 8 + 8 + 4 bilden das dritte gnomon. Die Werte der 7 Rechensteine werden vom dritten Restradikanden abgezogen. Es verbleibt folgender vierter Restradikand:
64 + 16 + 8 + 4 + 1



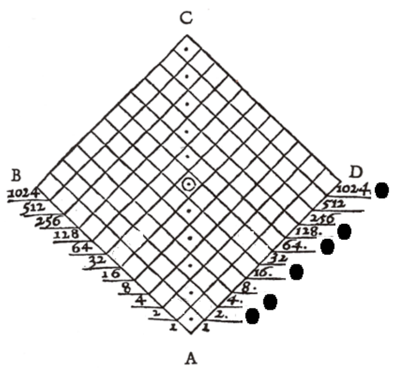
Es kann jetzt ein noch ein viertes gnomon gebildet werden, dessen 9 Rechensteine die Werte
32 + 32 + 8 + 8 + 4 + 4 + 2 + 1 haben.
Die Werte können vom vierten Restradikanden ohne Rest abgezogen werden. Durch die gnomons wurden 5 Reihen gebildet, die auf die Felder 32, 8, 4, 2 und 1 am Rand AB zeigen. Die Werte dieser Felder ergeben addiert den Ergebniswert der Wurzelrechnung 47. Es ist außerdem kein Restradikand und damit kein Rest verblieben.

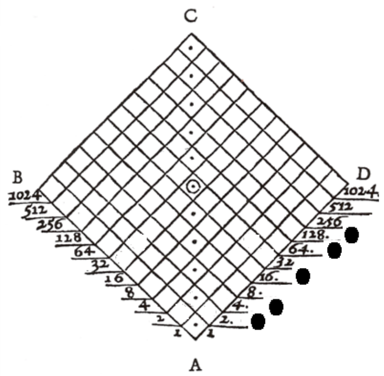


Beispiel 2:
Wurzel aus 1238 = 35, bei einem Rest von 13

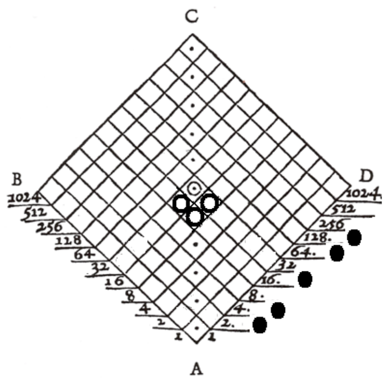
1238 ist in Zweierpotenzen zerlegt:
1024 (l) + 128 (h) + 64 (g) + 16 (e) + 4 (c) + 2 (b)

Entsprechend werden außen an den Rand AD des Rechenbretts bei den Feldern l, h, g, e, c und b Rechensteine gelegt. Der höchste abziehbare Wert, der auf die Mittelsenkrechte gelegt werden kann, liegt auf der Linie von l zu l. Dort wird der Kopfstein gelegt. Der Wert dieses Rechensteins (1024) wird vom Radikanden abgezogen.

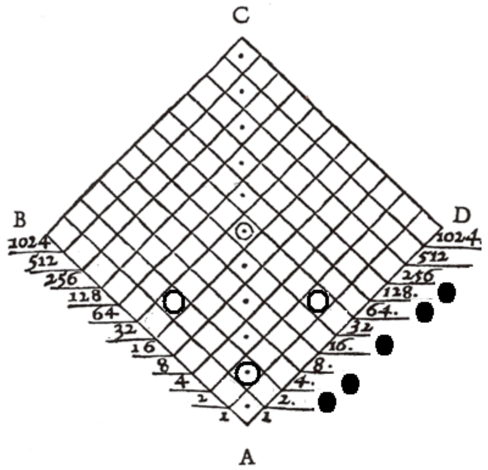




Um den Kopfstein werden jetzt drei Rechensteine gelegt, sodass sie zusammen mit dem Kopfstein ein Quadrat bilden. Außerdem müssen die Werte der drei neu gesetzten Rechensteine gerade noch vom (Rest)-Radikanden abgezogen werden können.

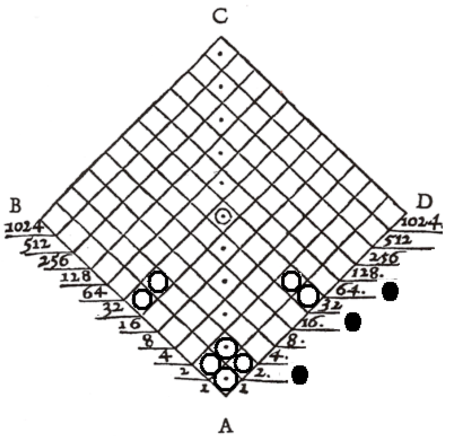


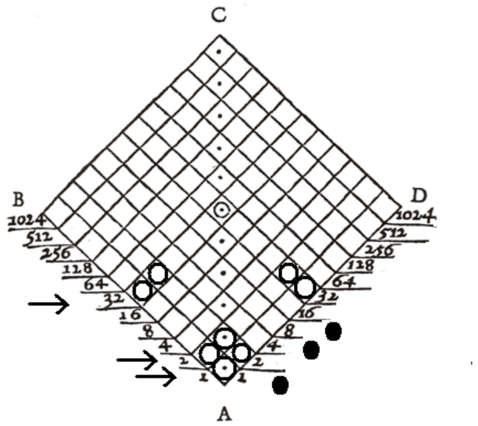
Abgebildet ist ein erster Versuch für die Bildung eines gnomons. Die Werte der drei neuen Rechensteine (512 + 512 + 256) können aber nicht vom Restradikanden abgezogen werden, weil der Restradikand kleiner ist. Deshalb rücken die Rechensteine soweit nach außen, bis ein gnonom entsteht bei dem die drei neuen Rechensteine einen Wert ergeben, der noch vom Restradikanden abgezogen werden kann.



Die gesuchten Rechensteine für das erste gnomon haben die Werte 64 + 64 + 4. Der Gesamtwert wird vom Restradikanden (128, 64, 16, 4 und 2) abgezogen, wobei ein Restradikand von 64 + 16 + 2 verbleibt.

Um das gnomon wird jetzt mit 5 Rechensteinen ein weiteres gnomon gelegt, wobei der Kopfstein wieder die oberste Ecke bildet.





Die Werte der 5 neu gelegten Rechensteine werden vom Restradikanden abgezogen, wobei ein letzter Restradikand von 8 + 4 + 1 (= 13) verbleibt.

Durch die gnomons sind 3 zum Rand AD parallele Reihen entstanden. Die 3 Reihen zeigen auf den Rand AB zu den Feldern 32, 2 und 1. Diese drei Werte sind zu addieren und ergeben das Ergebnis der Wurzelrechnung (= 35), wobei ein Restradikand (Rest) von 13 verblieben ist.

Mathematischer Hintergrund, erläutert am Beispiel 1

Die Berechnung einer Quadratwurzel ist die Umkehrung des Potenzierens mit der Hochzahl 2.

$10^2 = 100$ Quadratwurzel aus 100 = 10

Entsprechend ist es möglich, eine Zweierpotenz nach und nach dem Radikanden anzunähern.

Radikand = 2209

Die vorerst höchste Zweierpotenz, die kleiner als der Radikand ist, ist 32 (32 * 32 = 1024, die nächsthöhere Zweierpotenz wäre 64 * 64 = 4096),

- wegen 32 * 32 liegt der erste Rechenstein auf dem Schnittpunkt der Turmlinie 32 mit Turmlinie 32

Die weitere Annäherung ist $(32 + 8)^2 = 1600$

$(32+8)^2 = 32^2 + \mathbf{2*32*8 + 8^2}$

- die Erweiterung gegenüber dem ersten Spiegelstrich ist $2*32*8 + 8^2$

  $(32 * 8) + (32 * 8) + (8 * 8)$

  aufgrund der Erweiterung liegen die ergänzenden 3 Rechensteine auf den Schnittpunkten der Turmlinien 32 mit 8, 32 mit 8 sowie 8 mit 8

  Die Erweiterung des Ergebnisses der Wurzelrechnung ist + 8

Die weitere Annäherung ist $((32+8)+4))^2 = 1936 = (32+8)^2 + 2*(32+8)*4 + 4^2$

- die Erweiterung gegenüber dem letzten Spiegelstrich ist $2*(32+8)*4 + 4^2$

  $2*(32*4) + 2*(8*4) + (4*4)$

  aufgrund der Erweiterung liegen die ergänzenden Rechensteine auf den Schnittpunkten der

  Turmlinien 32 mit 4, 32 mit 4, 8 mit 4, 8 mit 4 und 4 mit 4

  Die Erweiterung des Ergebnisses der Wurzelrechnung ist + 4

Die weitere Annäherung ist $((32+8+4) + 2)^2 = 2116 = (32+8+4)^2 + 2*(32+8+4)*2 + 2^2$

- die Erweiterung gegenüber dem letzten Spiegelstrich ist $2*(32+8+4)*2 + 2^2$
  $2*(32*2) + 2*(8*2) + 2*(4*2) + (2*2)$
  aufgrund der Erweiterung liegen die ergänzenden Rechensteine auf den Schnittpunkten der
  Turmlinien 32 mit 2, 32 mit 2, 8 mit 2, 8 mit 2, 4 mit 2, 4 mit 2 und 2 mit 2
  Die Erweiterung des Ergebnisses der Wurzelrechnung ist + 2

Die weitere Annäherung ist $((32+8+4+2)+1)^2 = 2209 = (32+8+4+2)^2 + 2*(32+8+4+2)*1 + 1^2$

- die Erweiterung gegenüber dem letzten Spiegelstrich ist $2*(32+8+4+2)*1 + 1^2$
  $2*(32*1) + 2*(8*1) + 2*(4*1) + 2*(2*1) + (1*1)$
  aufgrund der Erweiterung liegen die ergänzenden Rechensteine auf den Schnittpunkten der
  Turmlinien 32 mit 1, 32 mit 1, 8 mit 1, 8 mit 1, 4 mit 1, 4 mit 1, 2 mit 1, 2 mit 1 und 1 mit 1

Dez. 2008
Korr. Jan. 2009
□