

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN,
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

ERSTER BAND IN ZWEI TEILEN.

ARITHMETIK UND ALGEBRA.

REDIGIERT VON
WILHELM FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

ZWEITER TEIL.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900—1904.



ALLE RECHTE, EINSCHLISSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Inhaltsverzeichnis zu Band I Teil II.

C. Zahlentheorie.

1. Niedere Zahlentheorie. Von P. BACHMANN in Weimar.

	Seite
1. u. 2. Die Teilbarkeit der ganzen Zahlen	556
3. Euklidischer Algorithmus. Farey'sche Reihen.	558
4. Reste und Kongruenzen. Sätze von Fermat und Wilson. Primitive Wurzeln	561
5. Kongruenzen und unbestimmte Gleichungen ersten Grades. Partialbrüche. Perioden der Dezimalbrüche.	563
6. Quadratische Reste; Reziprozitätsgesetz.	565
7. Unbestimmte Gleichungen 2., 3., 4. Grades. Quadratische Kongruenzen	569
8. Höhere Kongruenzen. Galois'sche Imaginäre	573
9. Feststellung einer Zahl als Primzahl; Zerlegung grosser Zahlen in Faktoren	576
10. Vollkommene Zahlen	578
11. Potenzsummen der ersten m ganzen Zahlen.	579
12. Magische Quadrate	580

(Abgeschlossen im März 1900.)

2. Arithmetische Theorie der Formen. Von K. TH. VAHLEN in Königsberg i. Pr.

a. Lineare Formen	582
b. Allgemeines über bilineare und quadratische Formen	591
c. Binäre quadratische Formen und bilineare Formen von vier Variablen	599
d. Ternäre quadratische Formen	613
e. Quadratische Formen von n Variablen	622
f. Formen, die in Linearfaktoren zerfallen.	629
g. Sonstige Formen	633

(Abgeschlossen im April 1900.)

3. Analytische Zahlentheorie. Von P. BACHMANN in Weimar.

1. Zerfällung der Zahlen (ihre additiven Darstellungen)	636
2. Dirichlet'sche Reihen und Methoden, Gauss'sche Summen	643
3. Zahlentheoretische Funktionen.	648
4. Die Funktion $[x]$	654
5. Asymptotische Ausdrücke zahlentheoretischer Funktionen. Die Anzahl der Primzahlen	658
6. Mittlere Funktionswerte.	663
7. Transzendenz der Zahlen e und π	667

(Abgeschlossen im April 1900.)

4a. Theorie der algebraischen Zahlkörper. Von D. HILBERT in Göttingen.

1. Algebraischer Zahlkörper	676
2. Ganze algebraische Zahl	677
3. Ideale des Körpers und ihre Teilbarkeit	678
4. Kongruenzen nach Idealen	679

	Seite
5. Diskriminante des Körpers	680
6. Relativkörper	682
7. Einheiten des Körpers	682
8. Idealklassen des Körpers	683
9. Transzendente Bestimmung der Klassenanzahl	684
10. Kronecker's Theorie der algebraischen Formen	685
11. Zerlegbare Formen des Körpers	686
12. Integritätsbereiche des Körpers	687
13. Moduln des Körpers	687
14. Galois'scher und Abel'scher Körper	688
15. Zerlegungskörper, Trägheitskörper und Verzweigungskörper eines Primideals im Galois'schen Körper	689
16. Zusammensetzung mehrerer Körper	691
17. Relativezyklischer Körper von relativem Primzahlgrade	691
18. Klassenkörper eines beliebigen Zahlkörpers	693
19. Relativquadratischer Zahlkörper	695
20. Reziprozitätsgesetz für quadratische Reste in einem beliebigen Zahlkörper	696

(Abgeschlossen im April 1900.)

4b. Theorie des Kreiskörpers. Von D. HILBERT in GÖTTINGEN.

1. Kreiskörper für einen Primzahlexponenten	699
2. Kreiskörper für einen zusammengesetzten Wurzelexponenten	700
3. Lagrange'sche Resolvente oder Wurzelzahl	701
4. Anwendungen der Theorie des Kreiskörpers auf den quadratischen Körper	702
5. Kreiskörper in seiner Eigenschaft als Abel'scher Körper	704
6. Transzendente Bestimmung der Anzahl der Idealklassen im Kreiskörper	705
7. Kummer'scher Zahlkörper und seine Primideale	706
8. Normenreste und Normennichtreste des Kummer'schen Zahlkörpers	708
9. Existenz unendlich vieler Primideale mit vorgeschriebenen Potenzcharakteren	710
10. Regulärer Kreiskörper und regulärer Kummer'scher Körper	710
11. Geschlechter im regulären Kummer'schen Körper	711
12. Reziprozitätsgesetz für l^{te} Potenzreste im regulären Kummer'schen Körper	712
13. Anzahl der vorhandenen Geschlechter im regulären Kummer'schen Körper	713
14. Der Fermat'sche Satz	713

(Abgeschlossen im April 1900.)

5. Arithmetische Theorie algebraischer Grössen. Von G. LANDSBERG in Heidelberg. (Siehe: B 1c, p. 284—301.)

6. Komplexe Multiplikation. Von H. WEBER in Strassburg.

1. Historische Einleitung	718
2. Komplexe Multiplikation und quadratische Formen	719
3. Die Invarianten	720
4. Klasseninvarianten und Klassenkörper	722
5. Klasseninvarianten in verschiedenen Ordnungen	723
6. Irreduzibilität der Klassengleichung	724
7. Galois'sche Gruppe der Klassengleichung	726
8. Primideale im Klassenkörper	727
9. Zerfällung der Klassengleichung	727
10. Die Klasseninvarianten $f(\omega)$, $f_1(\omega)$	729
11. Komplexe Multiplikation und Teilung	729
12. Die Klassenzahlrelationen	731

(Abgeschlossen im Juni 1900.)

D. Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung.

1. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von E. CZUBER in Wien.

	Seite
1. Wahrscheinlichkeit a priori. Definition und Bedeutung der mathematischen Wahrscheinlichkeit	734
2. Direkte Wahrscheinlichkeitsbestimmung	737
3. Totale Wahrscheinlichkeit	738
4. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit	739
5. Kombination der Sätze über totale u. zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit	741
6. Die Differenzenrechnung als methodisches Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung	742
7. Teilungsproblem	744
8. Moivre's Problem	746
9. Problem der Spieldauer	748
10. Weitere Probleme, Glücksspiele betreffend	750
11. Erweiterung der Definition. Geometrische Wahrscheinlichkeit	753
12. Theorem von Jakob I Bernoulli	755
13. Poisson's Gesetz der grossen Zahlen	758
14. Wahrscheinlichkeit a posteriori. Wahrscheinlichkeit der Ursachen, aus der Beobachtung abgeleitet	759
15. Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse, aus der Beobachtung abgeleitet	762
16. Von zufälligen Ereignissen abhängende Vor- und Nachteile. Mathematische Erwartung	764
17. Moralische Erwartung	765
18. Mathematisches Risiko	766

(Abgeschlossen im Aug. 1900.)

2. Ausgleichsrechnung. Von J. BAUSCHINGER in Berlin.

1. Aufgabe der Ausgleichsrechnung	769
2. Erste Begründung von Gauss	771
3. Der Satz vom arithmetischen Mittel	772
4. Das Gauss'sche Fehlergesetz. Fehlerfunktion. Tafeln hierfür. Andere Fehlergesetze	773
5. Begründung von Laplace	776
6. Zweite Begründung von Gauss	777
7. Weitere Begründungsmethoden	778
8. Mittlerer, durchschnittlicher und wahrscheinlicher Fehler, Gewicht	779
—	
9. Direkte Beobachtungen von gleicher Genauigkeit	782
10. Direkte Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit	785
11. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen	786
12. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen	792
13. Ausgleichung bedingter Beobachtungen	794
14. Fehler in der Ebene und im Raume	795
15. Fehler der Ausgleichung. Ausschluss von Beobachtungen. Systematisches Verhalten der Fehler	796

(Abgeschlossen im Aug. 1900.)

3. Interpolation. Von J. BAUSCHINGER in Berlin.

1. Definition einer Interpolationsformel. Verschiedene Arten derselben	800
2. Historisches und hauptsächlichste Anwendungen	801
3. Parabolische Interpolation. Formel von Lagrange	801
4. Newton'sche Formel mit den Gauss'schen Umformungen	803
5. Andere Begründungen	805
6. Die Interpolationsformeln bei gleichen Intervallen der Argumente	806
7. Die früheren und einige neue Interpolationsformeln in der Encke'schen Bezeichnungsweise	807

	Seite
8. Mechanische Differenziation und Quadratur	810
9. Herstellung mathematischer Tabellen	812
10. Interpolation durch periodische Reihen	815
11. Die Cauchy'sche Interpolationsmethode	817
12. Interpolation durch die Exponentialfunktion	818
13. Interpolation bei zwei Variabeln	818
14. Die Interpolationsmethoden von Tschebyscheff	819

(Abgeschlossen im Jan. 1901.)

4a. Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik. Von L. VON BORTKIEWICZ in St. Petersburg (jetzt in Berlin).

1. Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in die Statistik	822
2. Die von Laplace begründeten Methoden zur Bestimmung des Genauigkeitsgrades statistischer Ergebnisse, Schlussfolgerungen und Konjunkturalberechnungen	823
3. Verbreitung dieser Methoden zumal unter dem Einflusse Poisson's	825
4. Bienaymé's und Cournot's Lehre von den solidarisch wirkenden zufälligen Ursachen	827
5. Die Lexis'sche Dispersionstheorie	829
6. Das Schema einer serienweise variierenden Wahrscheinlichkeit und dessen Anwendung auf die Statistik	832
7. Wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung der statistischen Mittelwerte	835
—	
8. Die innere Struktur der Sterblichkeitstafel	837
9. Die formale Bevölkerungstheorie	839
10. Methoden zur Ermittlung der Sterbenswahrscheinlichkeit und des Sterblichkeitskoeffizienten	843
11. Weiteres zur Konstruktion von Sterblichkeitstafeln	845
12. Konstruktion von Invaliditätstafeln	846

(Abgeschlossen im April 1901.)

4b. Lebensversicherungs-Mathematik. Von G. BOHLMANN in Göttingen (jetzt in Berlin).

1. Grundlagen. Verhältnis der Lebensversicherung zu anderen Versicherungen	857
2. Hypothesen, auf denen die Theorie beruht	859
3. Prinzipien, nach denen die Theorie auf die Erfahrung angewendet wird	860
4. Normale Risiken	864
5. Extrarisiken	867
6. Ausgleichung und Interpolation	869
7. Der Nettofonds. Definitionen	873
8. Einmalige Prämien für Leibrenten	875
9. Einmalige Prämien für Todesfallversicherungen	879
10. Sonstige Prämien	880
11. Prämienreserve	883
12. Abhängigkeit der Prämien und Reserven von den Rechnungselementen	886
13. Verbundene Leben	887
14. Der Bruttofonds. Zuschläge und Unkosten	889
15. Der Rückkaufswert	892
16. Die Bilanz	894
17. Der Gewinn	899
18. Dividenden	901
19. Theorie des Risikos. Problemstellung	902
20. Definitionen	904
21. Das mittlere Risiko	906
22. Das durchschnittliche Risiko	909
23. Die Stabilität	913

(Abgeschlossen im April 1901.)

E. Differenzenrechnung.

1. Differenzenrechnung. Von D. SELIWANOFF in St. Petersburg.

	Seite
1. Definitionen	919
2. Differenzen einfacher Funktionen	920
3. Anwendung auf die Absonderung der Wurzeln numerischer Gleichungen	920
4. Relationen zwischen successiven Werten und Differenzen einer Funktion	921
5. Newton'sche Interpolationsformel	922
6. Anwendung dieser Interpolationsformel auf die Berechnung der Logarithmen und Antilogarithmen	923
7. Anwendung auf die angenäherte Berechnung bestimmter Integrale	924
8. Summation der Funktionen	925
9. Bestimmte Summen	927
10. Die Jacob Bernoulli'sche Funktion	928
11. Euler'sche Summationsformel	929
12. Anwendungen der Euler'schen Formel	930
13. Allgemeines über Differenzengleichungen	931
14. Lineare Differenzgleichungen erster Ordnung	933
15. Lineare Differenzgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	933
16. Anwendungen der Differenzgleichungen	935

(Abgeschlossen im April 1901.)

F. Numerisches Rechnen.

1. Numerisches Rechnen. Von R. MEHMKE in Stuttgart.

1. Geordnete Multiplikation und Division	941
2. Komplementäre Multiplikation und Division	942
3. Umgehung der Division	943
4. Beschränkung in den verwendeten Ziffern	944
5. Tafeln. Produktentafeln	944
6. (Multiplikationstafeln mit einfachem Eingang:) Tafeln der Viertelquadrate und der Dreieckszahlen	947
7. Quotienten- und Divisionstafeln	949
8. Tafeln der Quadrate, Kuben und höheren Potenzen	950
9. Faktoren-(Divisoren-)Tafeln	951
10. Apparate. Rechenbrett (Abacus)	953
11. Sonstige Additions- (bezw. Subtraktions-)Apparate ohne selbsttätige Zehnerübertragung	954
12. Multiplikations- und Divisionsapparate	955
13. Arithmographen für alle vier Spezies	957
14. Maschinen. Zählwerk	959
15. Maschinen zum Addieren und Subtrahieren	960
16. Schaltwerk	964
17. Erweiterte Additionsmaschinen (für alle vier Spezies)	966
18. Eigentliche Multiplikationsmaschinen	970
19. Subtraktion und Division. Nebenzählwerk (Quotient)	973
20. Besondere Einrichtungen	974
21. Ausführung zusammengesetzter Rechnungen	975
22. Differenzenmaschinen	977
23. Analytische Maschinen	978
24. Das Rechnen mit ungenauen Zahlen im allgemeinen	978
25. Abgekürzte Multiplikation und Division	983
26. Abgekürztes Wurzelausziehen	984
27. Tafeln. Logarithmentafeln	985
28. Fortsetzung: Abgekürzte Logarithmentafeln	993
29. Tafeln der Antilogarithmen	997
30. Additions- und Subtraktionslogarithmen	998

	Seite
31. Quadratische Logarithmen	1001
32. Tafeln der Proportionaltheile	1002
33. Tafeln der Reziproken und zur Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche	1003
34. Tafeln der Quadrate und höheren Potenzen	1004
35. Tafeln der Quadrat- und Kubikwurzeln	1004
36. Tafeln zur Auflösung numerischer Gleichungen	1004
37. Graphisches Rechnen. Gleichmässiger Massstab. Gewöhnliche arithmetische Operationen	1008
38. Berechnung rationaler ganzer Funktionen und Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten	1011
39. Systeme linearer Gleichungen	1014
40. Logarithmischer Massstab. Gewöhnliche arithmetische Operationen	1018
41. Berechnung von Funktionen und Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten	1020
42. Systeme von Gleichungen	1023
43. Nomographie. Tafeln für Funktionen einer Veränderlichen	1026
44. Cartesische Tafeln	1028
45. Hexagonale Tafeln	1035
46. Methode der fluchtrecten Punkte	1038
47. Mehrfach bezifferte Elemente	1043
48. Bewegliche Systeme	1045
49. Allgemeine Theorie von d'Ocagne	1050
50. Apparate und Maschinen. Logarithmischer Rechenschieber	1053
51. Gekrümmte Rechenschieber (Rechenscheiben u. s. w.)	1060
52. Verallgemeinerungen des Rechenschiebers	1063
53. Stetige Rechenmaschinen für die gewöhnlichen arithmetischen Operationen	1065
54. Mechanismen zur Auflöung von Gleichungen mit einer Unbekannten	1067
55. Mechanismen zur Auflösung von Gleichungssystemen	1070
56. Physikalische Methoden. Hydrostatische Auflösung von Gleichungen und Systemen solcher	1072
57. Elektrische Auflöung von Gleichungen	1073
58. Anhang. Proben	1073
59. Gemischte Methoden	1075
60. Vorbereitung der Formeln und der Rechnung	1076

(Abgeschlossen im Juni 1902.)

G. Ergänzungen zum I. Bande.

1. Mathematische Spiele. Von W. AHRENS in Magdeburg.

1. Mathematische Fragen des praktischen Schachspiels	1081
2. Achtdamenproblem	1082
3. Rösselsprung	1084
4. Nonnen- oder Einsiedler-(Solitär-)spiel	1086
5. Boss-Puzzle oder Fünfzehnerspiel	1087
6. Josephsspiel	1088
7. Wanderungsspiele	1089
8. Kartenmischen nach Gergonne und nach Monge	1090
9. Baguenaudier	1091
10. Nim oder Fan-Tan	1092
11. Varia	1093

(Abgeschlossen im Juni 1902.)

2. Anwendungen der Mathematik auf Nationalökonomie.

Von V. PARETO in Lausanne.

1. Geschichte	1097
2. Welche Erscheinungen behandelt die mathematische Wirtschaftslehre?	1099
3. Grundgleichungen, die sich durch Verwertung des Begriffes der Ophelimität aufstellen lassen	1102

4. Grundgleichungen, die sich ergeben, wenn man die Ausgangswahl als Ausgangspunkt nimmt	1107
5. Eigenschaften der Elementar-Ophelimität und der Indifferenzlinien. . .	1111
6. Verwertung der Grundgleichungen	1113
7. Das Maximum der Ophelimität oder die Freiheit der Wahl.	1117
8. Die Variationen der Produktionskoeffizienten.	1118
9. Dynamik	1119

(Abgeschlossen im August 1902.)

**3. Unendliche Prozesse mit komplexen Termen. Von A. PRINGS-
HEIM in München.**

1. Grenzwerte komplexer Zahlenfolgen	1121
2. Unendliche Reihen mit komplexen Gliedern: Konvergenz und Divergenz	1122
3. Absolute Konvergenz.	1122
4. Unbedingte und bedingte Konvergenz	1124
5. Multiplikation und Addition komplexer Reihen. Doppelreihen . . .	1125
6. Unendliche Produkte	1126
7. Unendliche Kettenbrüche	1127

(Abgeschlossen im Juni 1904.)

Bandregister	1129—1197
-------------------------------	------------------