Der Goldene Schnitt

Seine Bedeutung in Natur und Kultur

Rechnen wie damals

Rudolf-Steiner-Schule, Gröbenzell

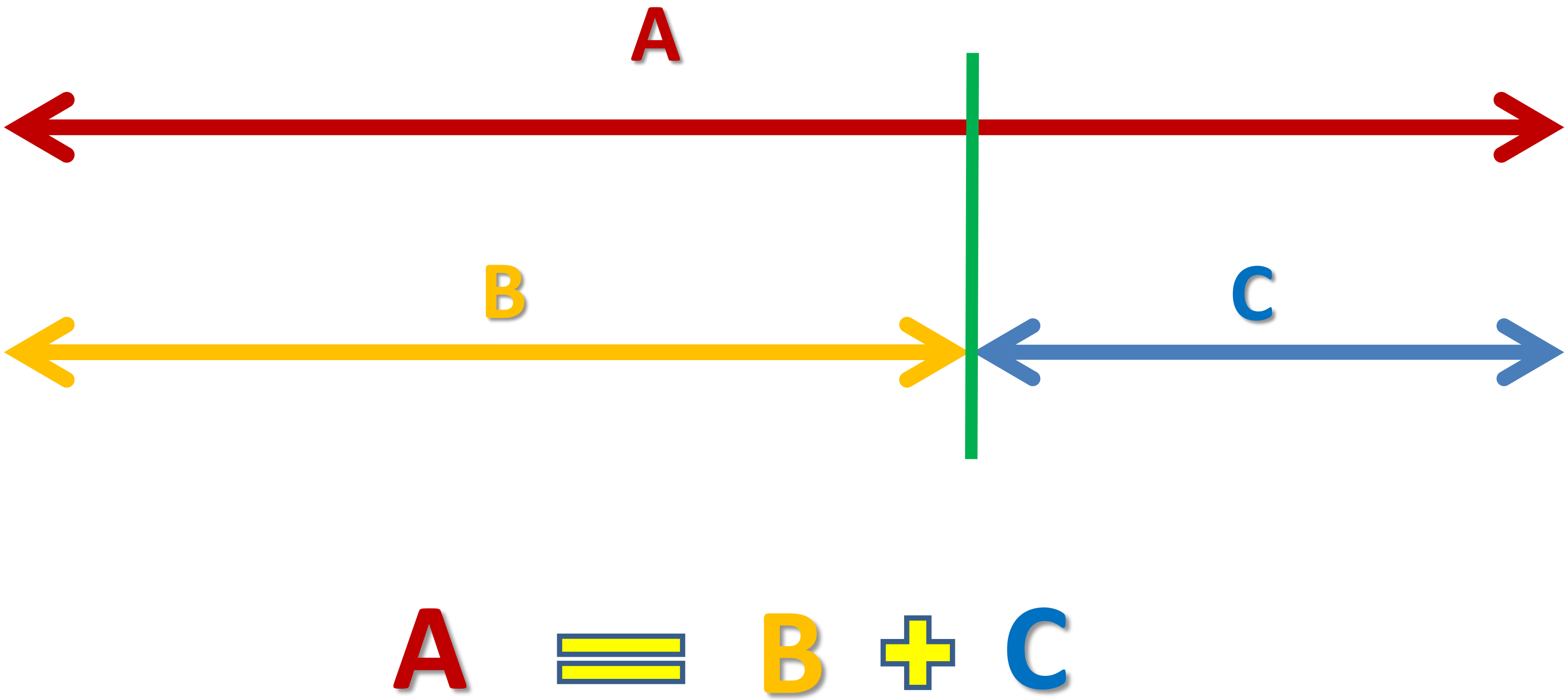
23. März 2015

Klaus Kühn

Aktualisierte Version

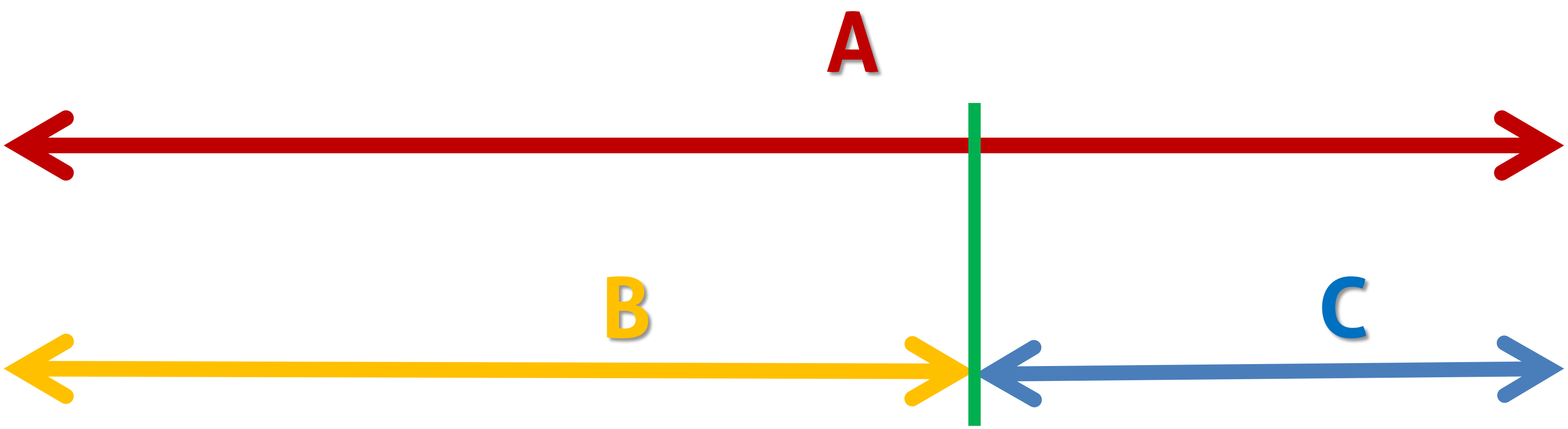
Der Goldene Schnitt

1. Grafisch – rechnerisch



Der Goldene Schnitt

1. Grafisch – rechnerisch



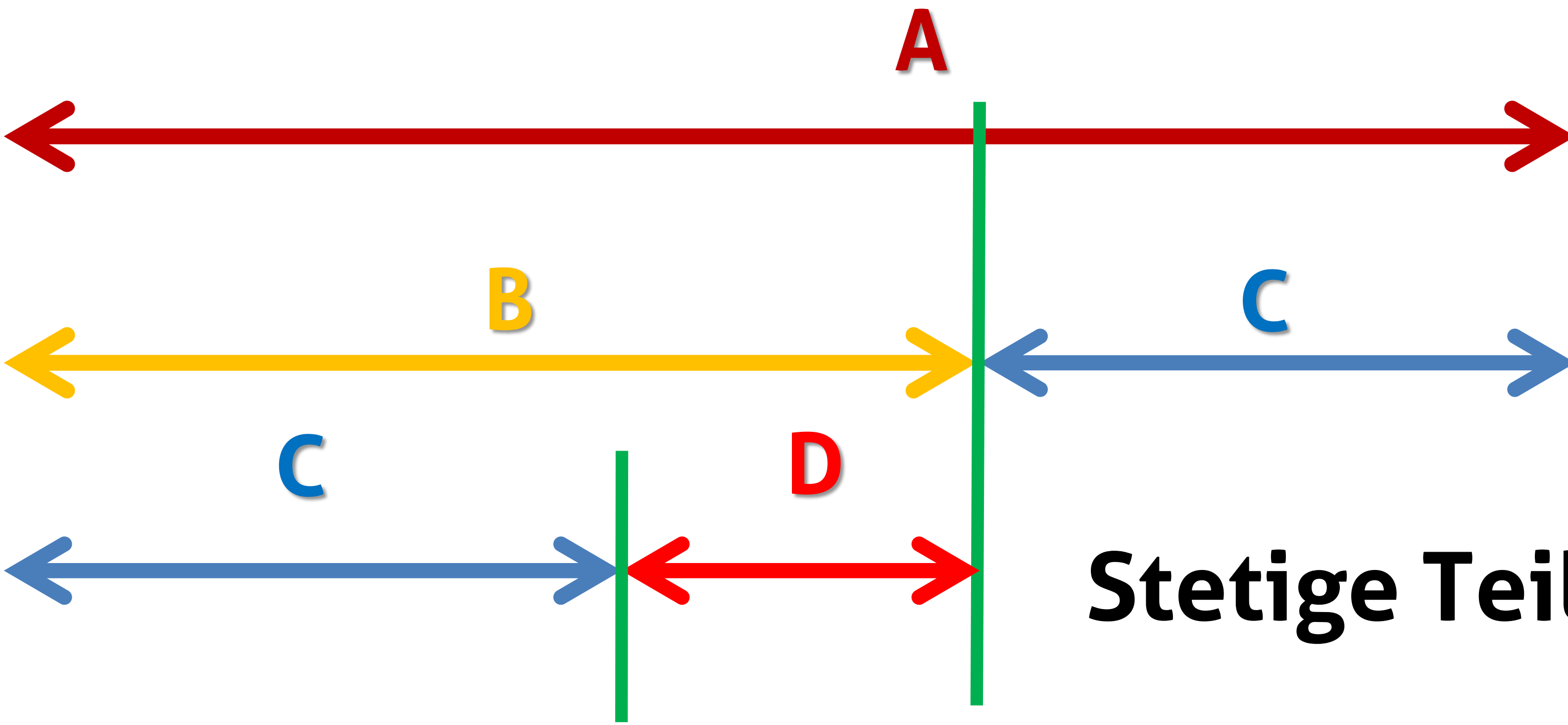
Eine Strecke A ist dann im Goldenen Schnitt geteilt,

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$$

wenn sich A zu B verhält wie B zu C

Der Goldene Schnitt

1. Grafisch – rechnerisch

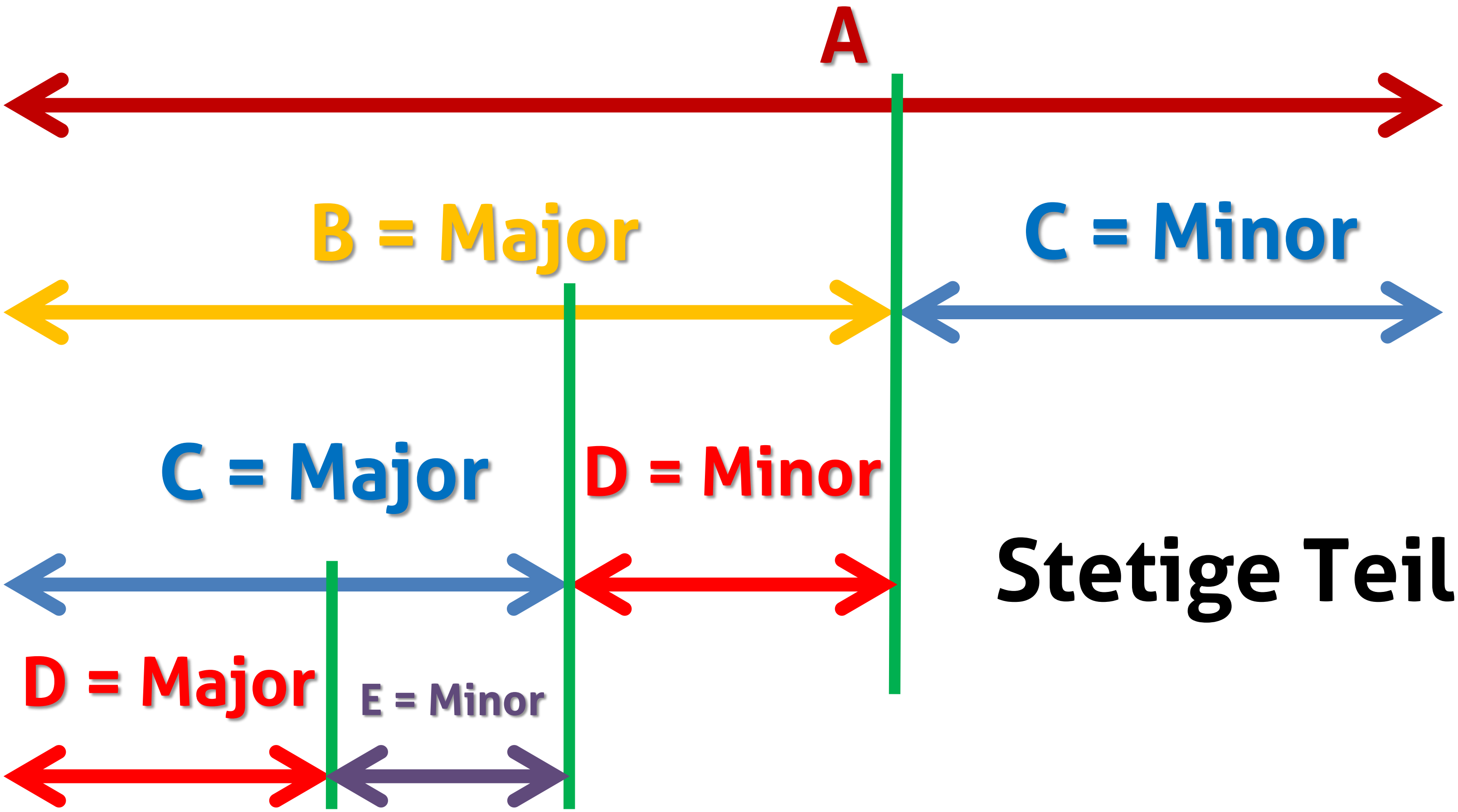


Stetige Teilung

$$B = C + D$$

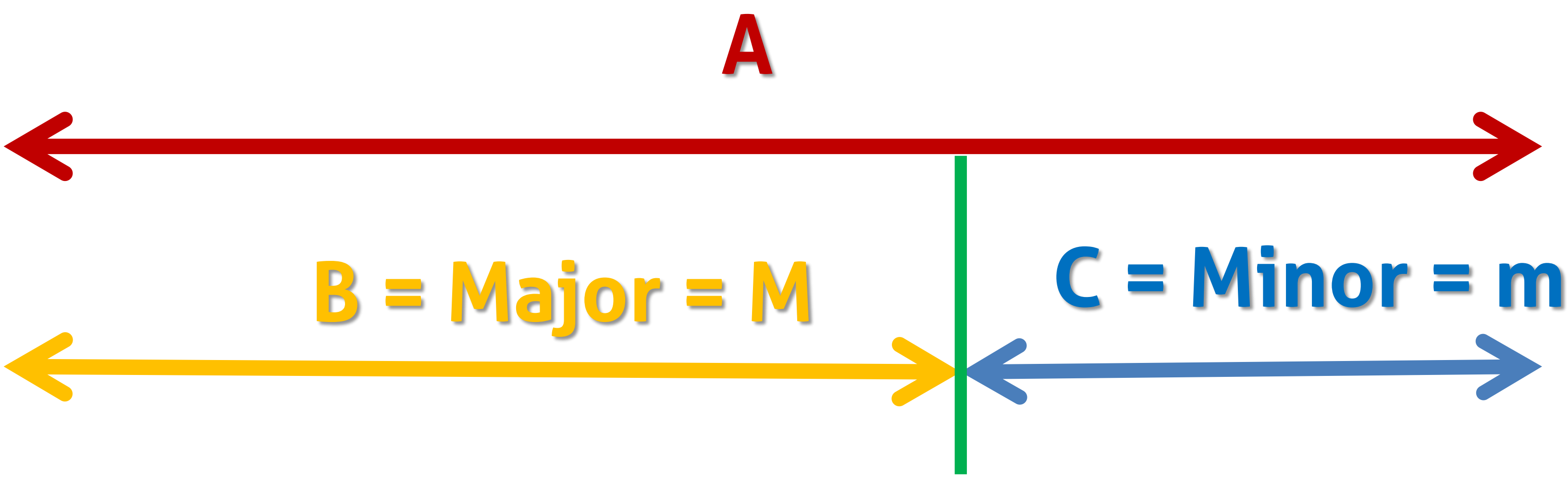
Der Goldene Schnitt

1. Grafisch – rechnerisch



Stetige Teilung

Der Goldene Schnitt



Wenn
A = 1 ist,
dann ist
C = 1 – B

$$C = 1 - B$$

und damit

$$\frac{1}{B} = \frac{B}{1 - B}$$

Umgeformt: $B^2 = 1 - B$ oder $B^2 + B - 1 = 0$

Der Goldene Schnitt

1. Mathematisch – rechnerisch

$B^2 = 1 - B$ oder $B^2 + B - 1 = 0$ oder allgemeiner $x^2 + px - q = 0$

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt[2]{\frac{p^2}{4} - q} \qquad x_{1;2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt[2]{\frac{\color{red}{1}^2}{4} + \color{red}{1}}$$

$$x_{1;2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt[2]{\frac{1^2}{4} + \frac{4}{4}} \qquad x_{1;2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt[2]{\frac{5}{4}}$$

$$x_{1;2} = \pm \sqrt[2]{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$x_{1;2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= +\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \\ x_2 &= +\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \end{aligned}}$$

Der Goldene Schnitt

„Das Geheimnis der göttlichen Proportionen
des goldenen Schnittes
war der Schöpfung von Anfang an immanent."[1]

[1] Dan BROWN: Sakrileg. ISBN 3-7857-2152-8. Bergisch Gladbach: Verlagsgruppe Lübbe GmbH & Co, 2004, S. 133.

Entnommen dem Vorwort der Arbeit von Markus Faustmann

Goldener Schnitt *= Göttliches Verhältnis = Göttliche Proportion

1. Mathematisch – rechnerisch

$$x_1 = + \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) = + \frac{1}{2} (2,236.. - 1) = 0,618.. = \varphi$$

$$x_2 = + \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1) = + \frac{1}{2} (2,236.. + 1) = 1,618.. = \Phi$$

* Spezialfall der harmonischen Teilung

Φ

1.618033988749894848204586834365638117720309179805762862135448622705260462818 90

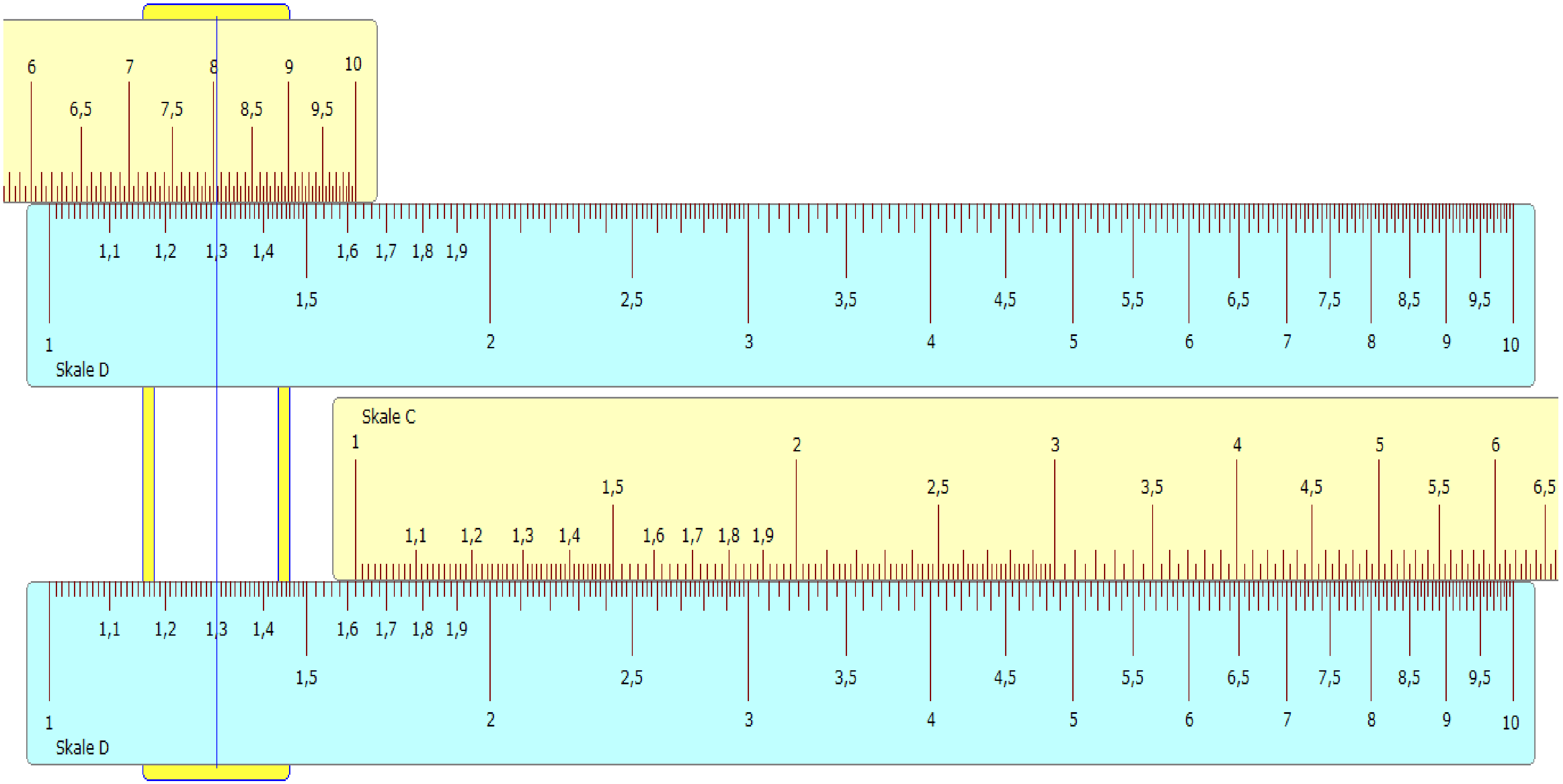
- 2449707207204189391137484754088075386891752126633862223536931793180060766726 35
- 4433389086595939582905638322661319928290267880675208766892501711696207032221 04
- 321626954862629631361443814975870122034080588795445474924618569536486444924104
- 432077134494704956584678850987433944221254487706647809158846074998871240076521
- 705751797883416625624940758906970400028121042762177111777805315317141011704666
- 599146697987317613560067087480710131795236894275219484353056783002287856997829
- 778347845878228911097625003026961561700250464338243776486102838312683303724292
- 675263116533924731671112115881863851331620384005222165791286675294654906811317
- 159934323597349498509040947621322298101726107059611645629909816290555208524790
- 352406020172799747175342777592778625619432082750513121815628551222480939471234
- 145170223735805772786160086883829523045926478780178899219902707769038953219681
- 986151437803149974110692608867429622675756052317277752035361393621076738937645
- 560606059216589466759551900400555908950229530942312482355212212415444006470340
- 565734797663972394949946584578873039623090375033993856210242369025138680414577
- 995698122445747178034173126453220416397232134044449487302315417676893752103068
- 737880344170093954409627955898678723209512426893557309704509595684401755519881
- 921802064052905518934947592600734852282101088194644544222318891319294689622002…….

Aufstellen einer Zahlenreihe

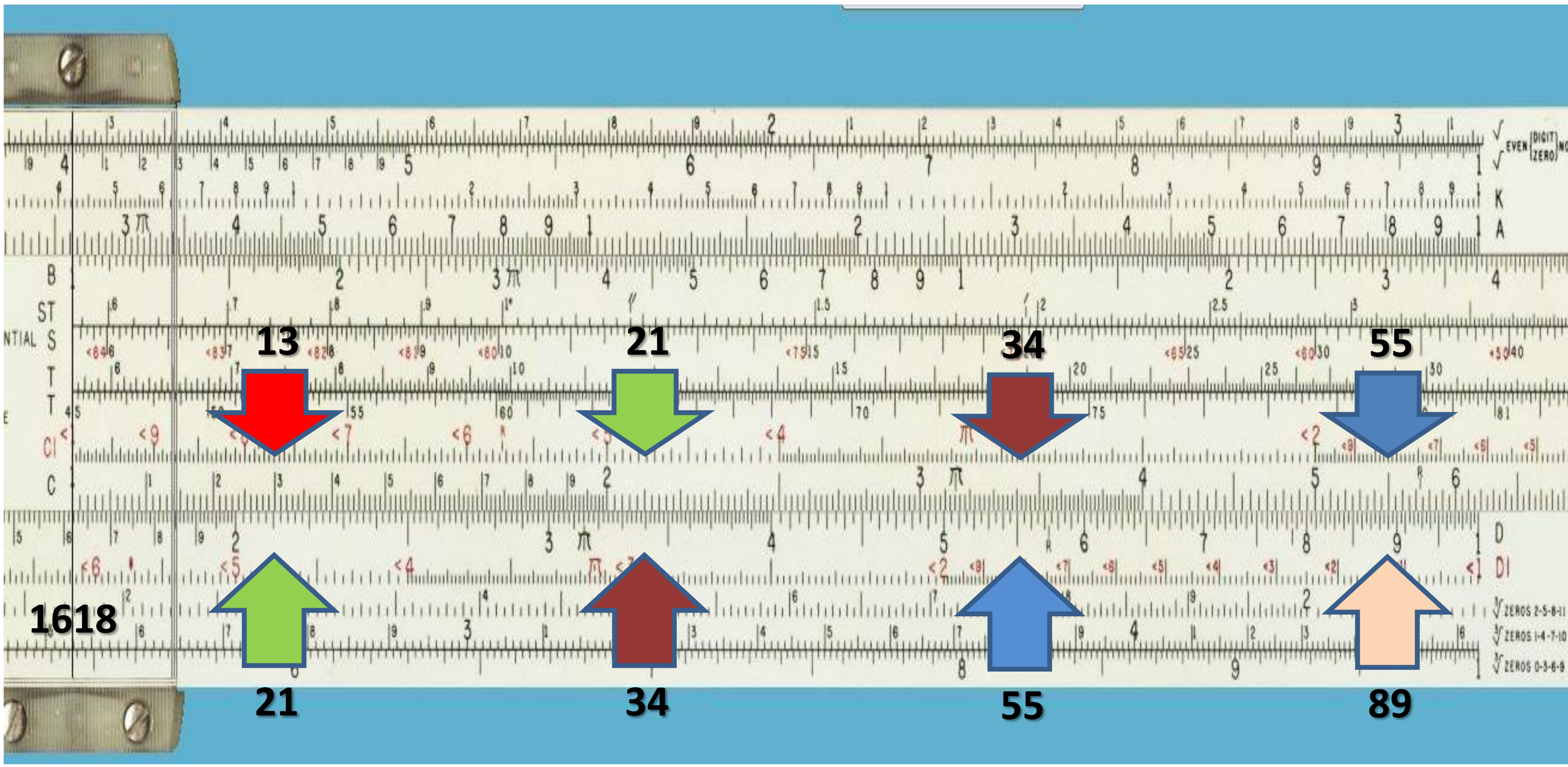
- Beginn mit zwei beliebigen Zahlen ≠ 0
  - die nächsten Glieder ergeben sich durch die Summe der beiden vorhergehenden Zahlen
  - Beispiel: 6, 9, 15, 24, 39,…

Was hat das mit dem
Goldenen Schnitt zu tun ?

Rechenschiebereinstellung 1.618



Bestimmung zweier benachbarter Fibonacci Zahlen mit dem Rechenschieber
(oder umgekehrt)



Stelle C1 auf D1618

Pickett N3-T Slide Rule [Copyright © 2005 Derek Ross]

Das Leben von Herrn Fibonacci

Leonardo da Pisa, posthum auch **Fibonacci** (filius Bonacci) genannt (* um 1170 in Pisa; † nach 1240 ebenda), war Rechenmeister in Pisa und gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters. Auf seinen Reisen nach Afrika, Byzanz und Syrien machte er sich mit der arabischen Mathematik vertraut und verfasste mit den dabei gewonnenen Erkenntnissen das Rechenbuch *Liber ab(b)aci* im Jahre 1202 (Überarbeitung 1228). Bekannt ist daraus heute vor allem die nach ihm benannte Fibonacci-Folge.
Leonardo wurde als einer von mindestens zwei Söhnen des Guglielmo Bonacci in Pisa geboren. Als der Vater von der Stadt als Notar in die Niederlassung der Pisaner Kaufmannschaft im algerischen Bougie, dem heutigen Bejaia, entsandt wurde – wofür man als Datum um 1192 annimmt –, ließ er auch Leonardo zu sich kommen, um ihn dort im Rechnen unterrichten zu lassen. Leonardo lernte dort das Rechnen mit den *novem figurae indorum* („neun Ziffern der Inder"), unseren heutigen (indo-arabischen) Ziffern, die den arabischen Mathematikern in Bagdad seit der zweiten Hälfte des 8. Jahrhunderts aus Indien bekannt geworden waren und im 12. Jahrhundert von Spanien (Toledo) aus durch lateinische Übersetzungen aus den arabischen Schriften des Al-Chwarizmi auch im Westen allmählich verbreitet wurden.

Nach: http://de.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci

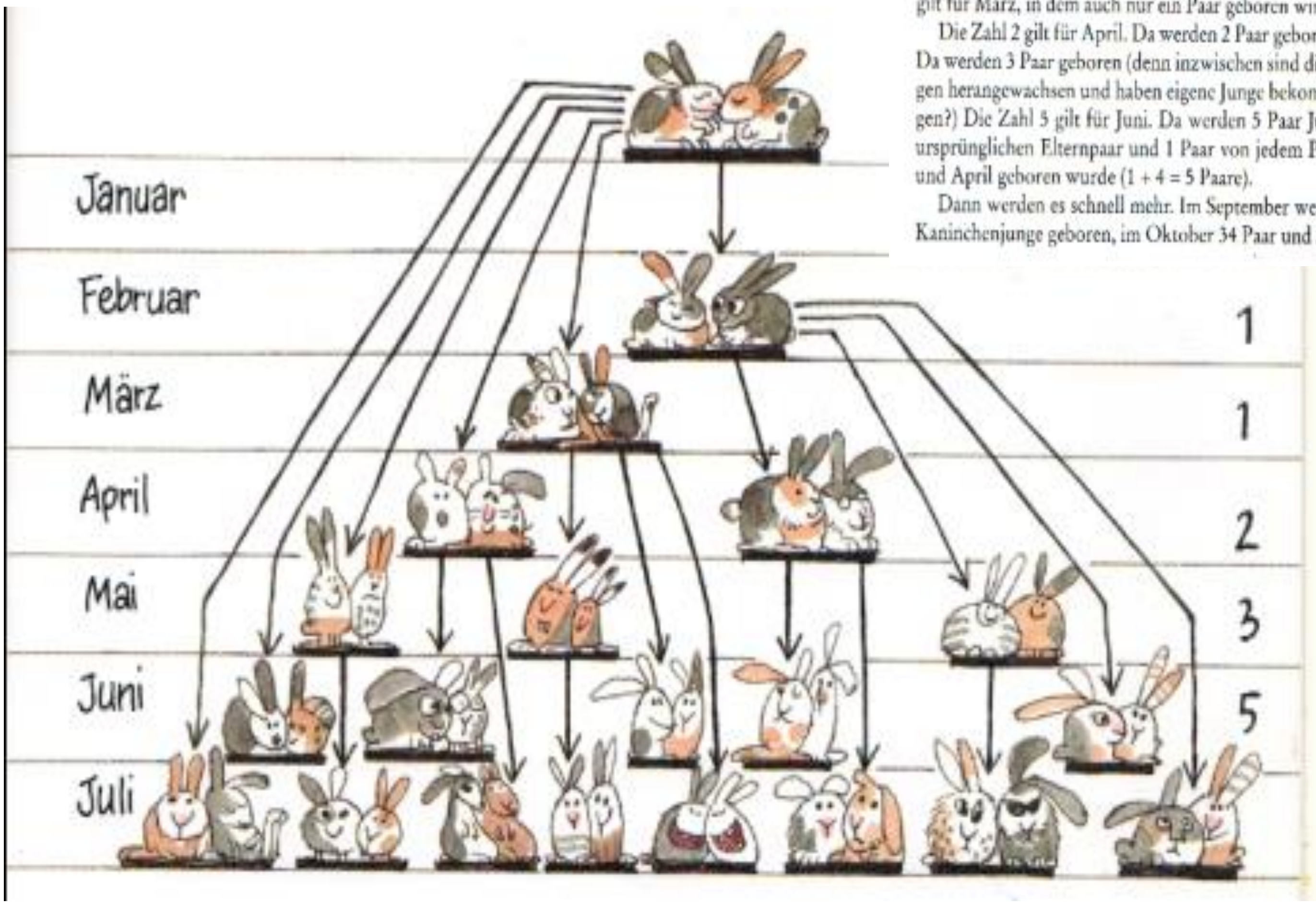
Kaninchen und die Fibonacci-Zahlen

Also, 0 war im Januar. Da wurde kein Junges geboren.

Die Zahl 1 gilt für Februar. Da wird ein Paar geboren. Die nächste Zahl 1 gilt für März, in dem auch nur ein Paar geboren wird.

Die Zahl 2 gilt für April. Da werden 2 Paar geboren. Die Zahl 3 gilt für Mai. Da werden 3 Paar geboren (denn inzwischen sind die im März geborenen Jungen herangewachsen und haben eigene Junge bekommen. Kannst du noch folgen?) Die Zahl 5 gilt für Juni. Da werden 5 Paar Junge geboren, 1 Paar vom ursprünglichen Elternpaar und 1 Paar von jedem Paar, das im Februar, März und April geboren wurde (1 + 4 = 5 Paare).

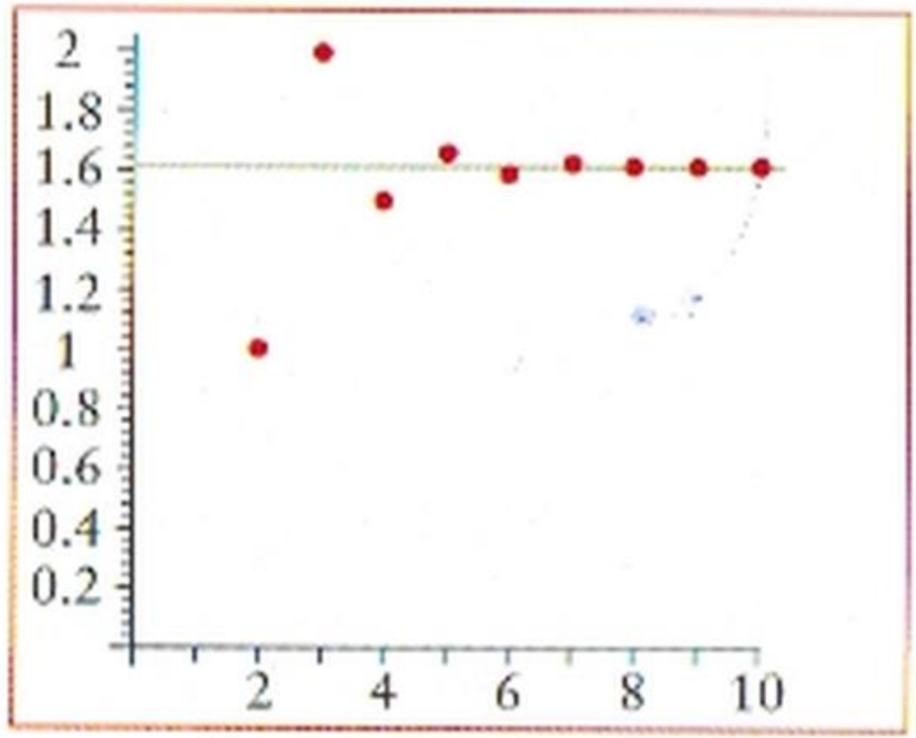
Dann werden es schnell mehr. Im September werden zum Beispiel 21 Paar Kaninchenjunge geboren, im Oktober 34 Paar und so weiter.



Aus: Dahl+Nordquist: Zahlen, Spiralen und magische Quadrate, F. Oetinger Verlag Hamburg

Die Fibonacci-Zahlen und Φ

1/1 = 1,000000	55/34 = 1,617647
2/1 = 2,000000	89/55 = 1,618182
3/2 = 1,500000	144/89 = 1,617978
5/3 = 1,666667	233/144 = 1,618056
8/5 = 1,600000	377/233 = 1,618026
13/8 = 1,625000	610/377 = 1,618037
21/13 = 1,615385	987/610 = 1,618033
34/21 = 1,619048	



Aus: Der Geheime Code, Köln 2008

Diese Grafik zeigt, wie sich die Abschnitte der Fibonacci-Spirale Φ, dem Goldenen Schnitt oder 1,618… annähern.

Der Goldene Schnitt

1. Rechnerische Besonderheiten für:

x_1 = 0,618 = φ und x_2 = 1,618 = Φ

$\Phi \times \varphi = 1$

$\Phi^2 - \Phi = 1$

$\Phi + \varphi = \sqrt{5} = 2,236$

$\Phi - \varphi = 1$

$\varphi^2 + \varphi = 1$

Wenn man Φ - den Goldenen Schnitt (GS) – potenziert, ergibt sich:

GS^0	=						1
GS^1	=	1,61803..				1 *	GS
GS^2	=	2,6179..	= ca.	1	+	1 *	GS
GS^3	=	4,2358..	= ca.	1	+	2 *	GS
GS^4	=	6,8535..	= ca.	2	+	3 *	GS
GS^5	=	11,0890..	= ca.	3	+	5 *	GS
GS^6	=	17,9420..	= ca.	5	+	8 *	GS
GS^7	=	29,0301..	= ca.	8	+	13 *	GS
GS^8	=	46,9708..	= ca.	13	+	21 *	GS

Die Lamé-Lucas'sche* Reihe

* Gabriel Lamé (1795 – 1870), Francois Lucas (1842 – 1891); französische Mathematiker

GS^0 = ($GS^{n+2} = GS^{n+1} + GS^n$ für alle natürlichen Zahlen n)						1
GS^1	=	1,61803..			1 *	GS
GS^2	= {$GS^0 + GS^1$}	2,6179..	= ca.	1 +	1 *	GS
GS^3	= $GS^1 + GS^2$	4,2358..	= ca.	1 +	2 *	GS
GS^4	= $GS^2 + GS^3$	6,8535..	= ca.	2 +	3 *	GS
GS^5	= $GS^3 + GS^4$	11,0890..	= ca.	3 +	5 *	GS
GS^6	= $GS^4 + GS^5$	17,9420..	= ca.	5 +	8 *	GS
GS^7	= $GS^5 + GS^6$	29,0301..	= ca.	8 +	13 *	GS
GS^8	= $GS^6 + GS^7$	46,9708..	= ca.	13 +	21 *	GS

Pascalsches Dreieck* - Was hat das mit dem Goldenen Schnitt zu tun ?

* Zur Bestimmung der Binomialkoeffizienten

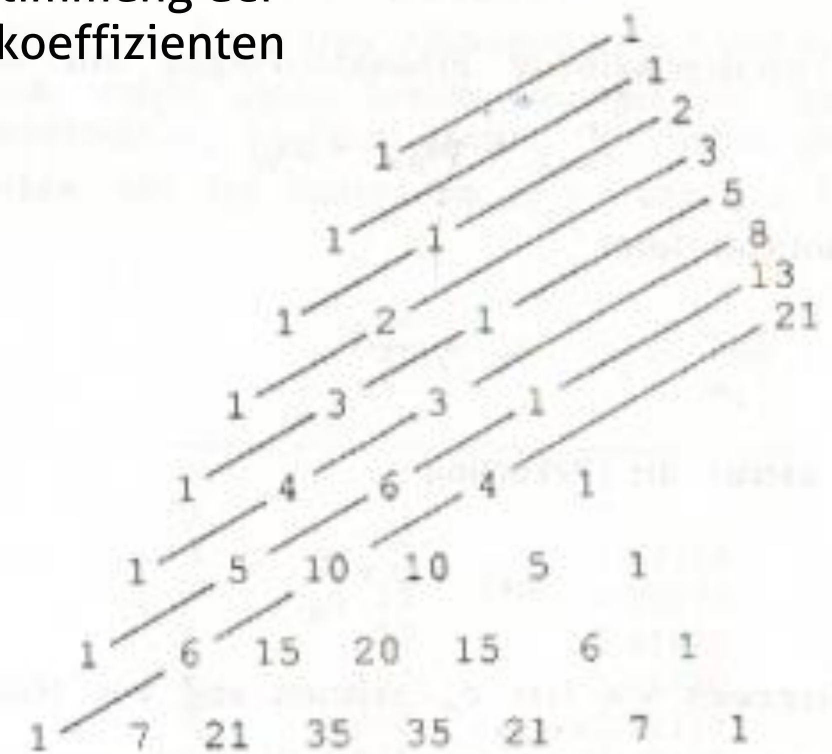


Abb. 88 Fibonacci-Zahlen als Schrägzeilensummen im Pascal-Dreieck

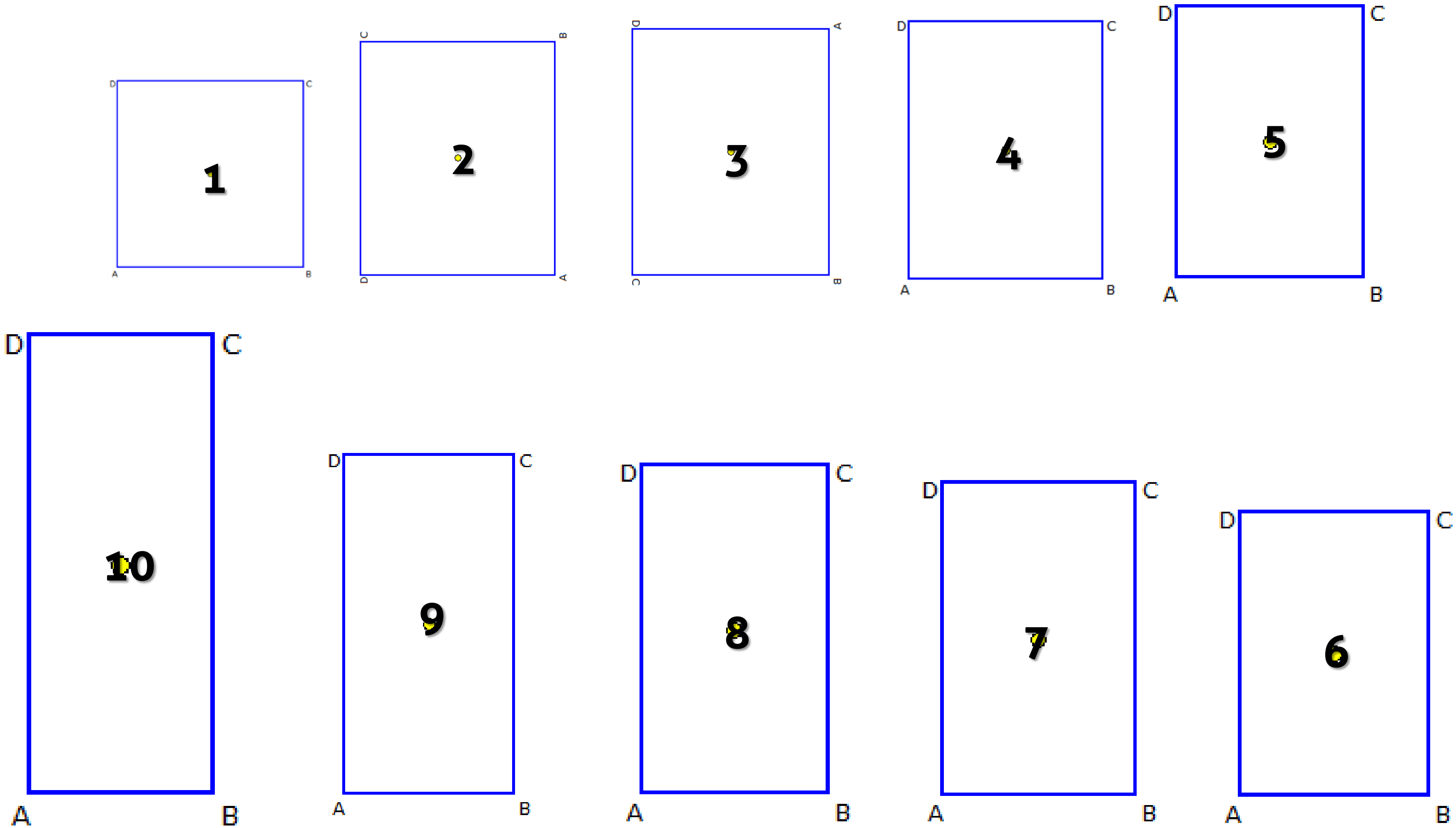
In affin entzerrter Darstellung ergeben sich die Fibonacci-Zahlen als „Schrägzeilen-summen“ des Pascal-Dreieckes.

Aus: Der Goldene Schnitt, Stuttgart 1993

Wo überall begegnen wir dem Goldenen Schnitt ?

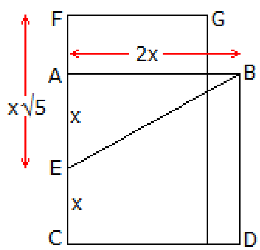
1. Grafisch – rechnerisch
2. Geometrisch
3. Zeitlich
   - Astronomie
   - Med. Diagnose
4. Natur
   - Pflanzen
   - Tiere
5. Kultur
   - Architektur
   - Musik
   - Malerei
   - Fotografie

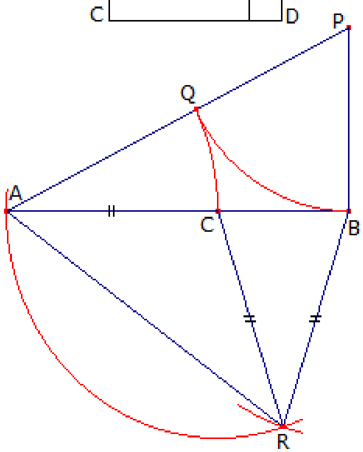
Welches Rechteck gefällt Ihnen am besten ?
(nach Gustav Theodor Fechner 1801 - 1887)



Der Goldene Schnitt

2. Geometrische Konstruktion (Beispiel)





Goldener Schnitt in der Geometrie

Die Schenkel eines goldenen Dreiecks stehen im goldenen Verhältnis zur Basis. Der Basiswinkel beträgt dann 36°. Dies nutzte u.a. Pythagoras zur Konstruktion von ϕ.

Euklid gab folgende Konstruktionsbeschreibung:
Gegeben ist ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 2x. E ist der Mittelpunkt von AC. Die Strecke BC hat dann die Länge $x\sqrt{5}$. Von E konstruiert man nun F in Richtung A mit der Länge von BC = $x\sqrt{5}$. FG ist nun gleich EF. Dann gilt:

$\phi = FC / CD = (EF + CE)/CD = x(\sqrt{5} + 1)/(2x) = 1/2\ (\sqrt{5} + 1)$
Das Verhältnis des Umkreisradius zur Seitenlänge im regelmäßigen Zehneck beträgt ebenfalls ϕ.

Winkel von 36°
Umgekehrt kann man mit der Konstruktion des goldenen Schnittes auch einen Winkel von 36° mit Zirkel und Lineal erzeugen.
C sei dazu der Punkt, der die Strecke AB stetig teilt.
Um C wird ein Kreis mit dem Radius CA gezeichnet, um B ein Kreis mit dem gleichen Radius. Beide Kreise schneiden sich in einem Punkt R.
Dann ist der Winkel BRC = 36°.

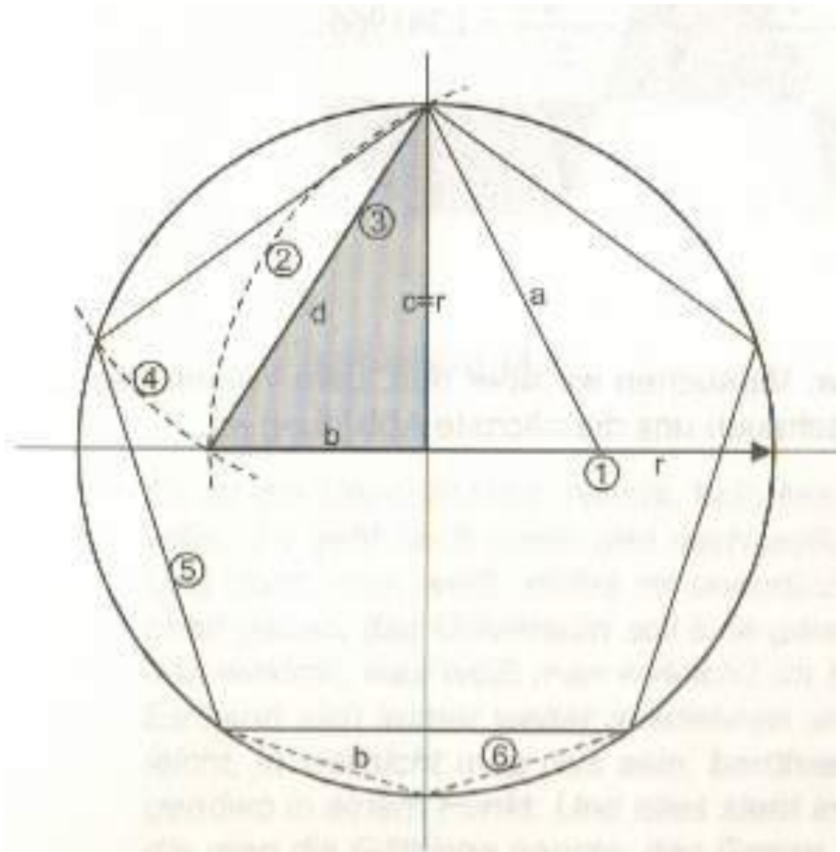
- Kunst und Goldener Schnitt
- Konstruktionen

Aus: ***WinFunktion 21 Mathematik***

Euklid hatte 350 v.Chr. In seinen „Elementen“ diese Konstruktion beschrieben.

Der Goldene Schnitt

2. Geometrische Konstruktion (Beispiel)

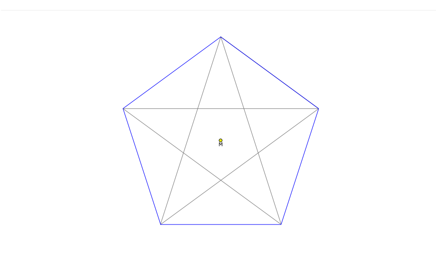


aus Hartmut Warm; Signatur der Sphären, Keplersternverlag Hamburg 2001 S. 321

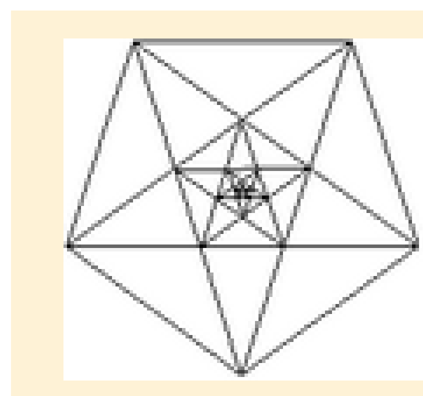
Der Goldene Schnitt

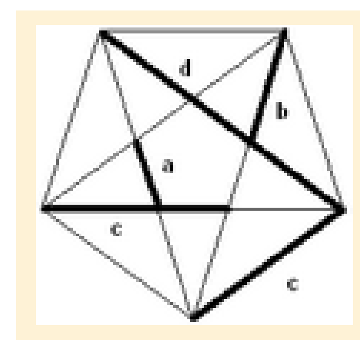
2. Geometrische Formen (Beispiel Pentagramm)

- Bei regulären Fünfecken geht es gleich zwei Mal um den Goldenen Schnitt, die Diagonalen schneiden einander im Goldenen Schnitt und außerdem ist das Verhältnis Seite zu Diagonale im Goldenen Schnitt.
- Das Pentagramm ist eines der ältesten magischen Symbole der Kulturgeschichte und gilt als Bannzeichen für den Teufel oder böse Geister. Es ist eine sternenförmige Figur, die aus den Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks aufgebaut ist. Daher teilen die Strecken des Pentagramms einander im Goldenen Schnitt. Andere Bezeichnungen sind Fünfstern, Pentalpha, Drudenfuß oder Pentakel (nur mit Umkreis).



Aus: ***WinFunktion 21 Mathematik***





Der Goldene Schnitt und Winkel

In dem Artikel "Roots of (H-L)/15 Recurrence Equations in Generalized Pascal Triangles" von Smith und Hoggatt in "The Fibonacci Quarterly vol 18 (1980)" finden sich Beziehungen zwischen den goldenen Verhältnissen und den trigonometrischen Funktionen bestimmter Winkel. Bezeichnen wir

$\phi = (\sqrt{5} - 1)/2$ und $\Phi = (\sqrt{5} + 1)/2$

so ergibt sich an den links sichtbaren Dreiecken

$\cos(72°) = \cos(2\pi/5) = \sin(18°) = \sin(\pi/10) = \phi/2 = 1/(2\Phi)$ **= 0,3090**

$\cos(36°) = \cos(\pi/5) = \sin(54°) = \sin(3\pi/10) = \Phi/2 = 1/(2\phi)$ **= 0,8090**

und weiter

$\cos(18°) = \sqrt{(\Phi \sqrt{5})} /2$

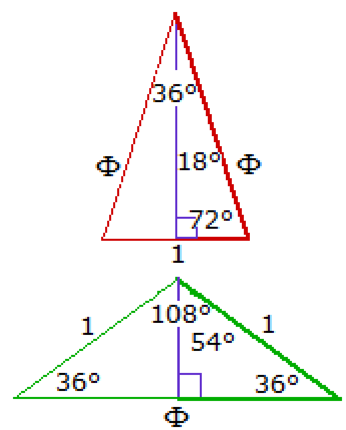
mit verschiedenen Additionstheoremen

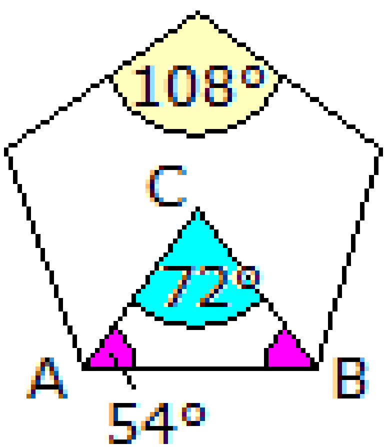
$\cos(12°) = (\phi + \sqrt{(3 \Phi \sqrt{5})}) /4$

$\cos(24°) = (\Phi + \sqrt{(3 \phi \sqrt{5})}) / 4$

$\cos(48°) = (-\phi + \sqrt{(3 \Phi \sqrt{5})}) /4$

$\cos(84°) = (-\Phi + \sqrt{(3 \phi \sqrt{5})}) /4$

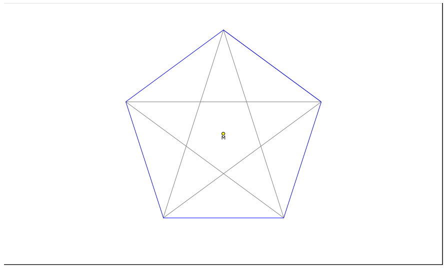


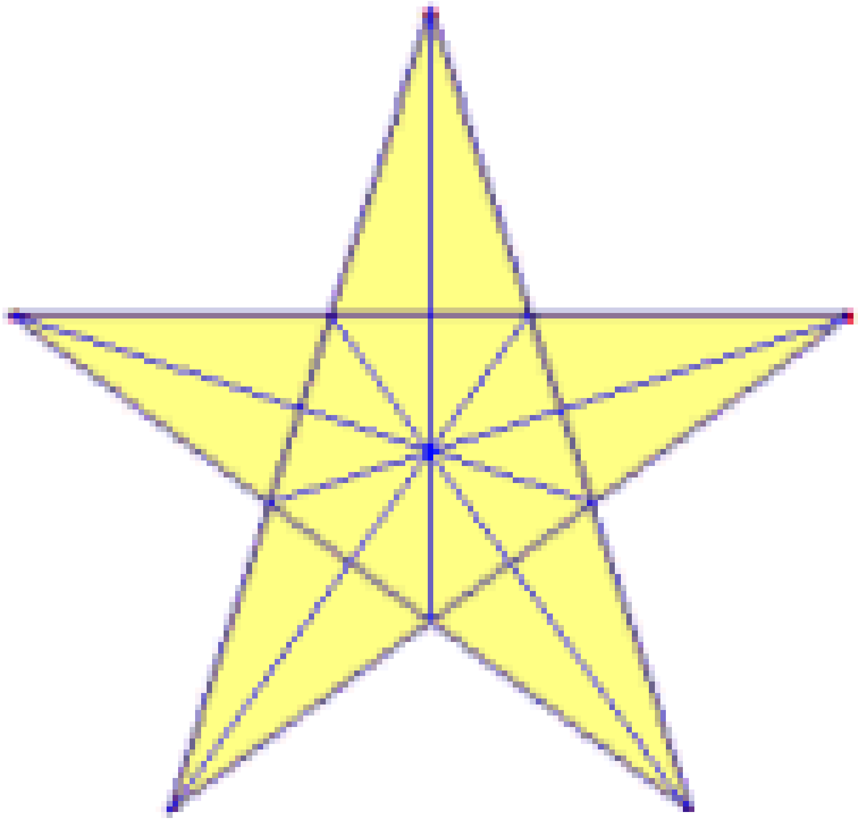


Aus: ***WinFunktion 21 Mathematik***

Pentagramm Rätsel - Hausaufgabe

- Wie viele Dreiecke sind in diesem Fünfstern verborgen ?





Der Fünfstern
auf Flaggen und Emblemen

Der Fünfstern ist ein Symbol, das in der Flaggenkunde nicht zu übersehen ist. Es gibt ihn nämlich auf 65 Nationalflaggen; was etwa ein Drittel von allen ausmacht. Damit ist er das am häufigsten gebrauchte Symbol (mit den unterschiedlichsten Bedeutungen).

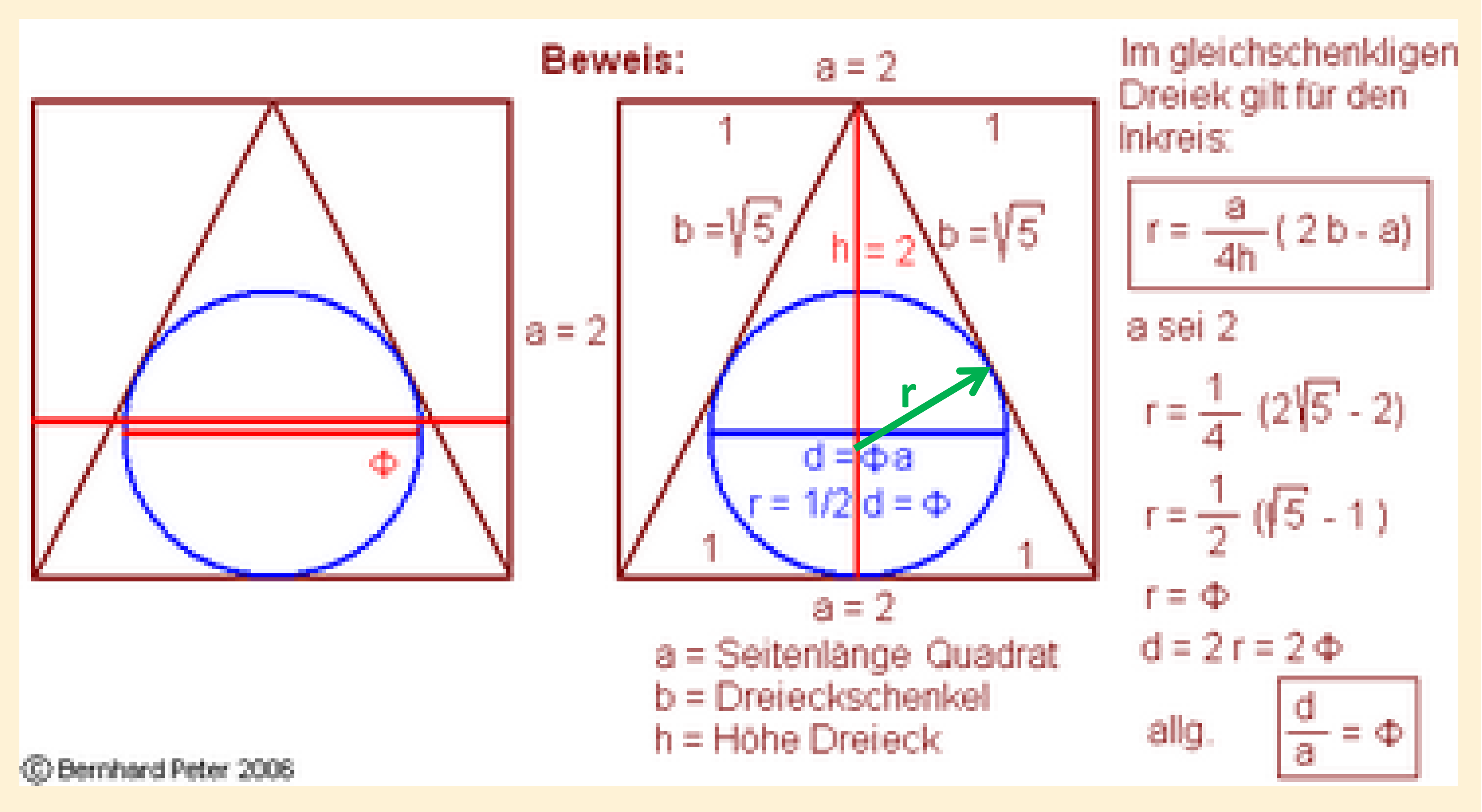
Pentagramm

DFB Fünfsterne….

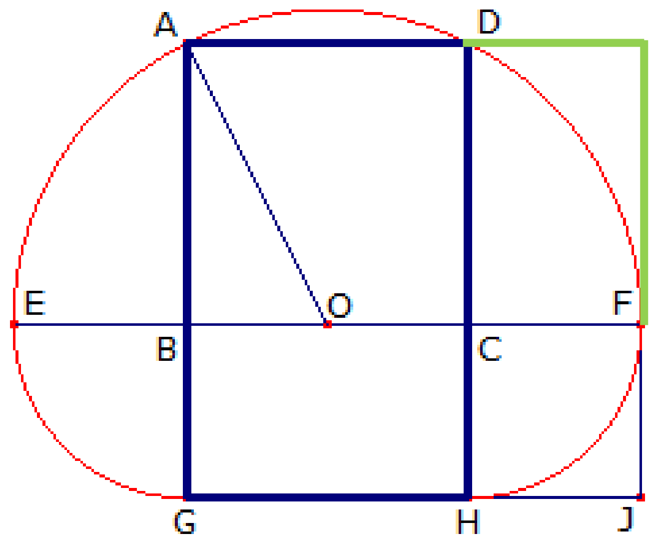
….nicht mitgezählt

Der Goldene Schnitt

2. Geometrische Konstruktion (Kreis im Dreieck)



Das Goldene Rechteck



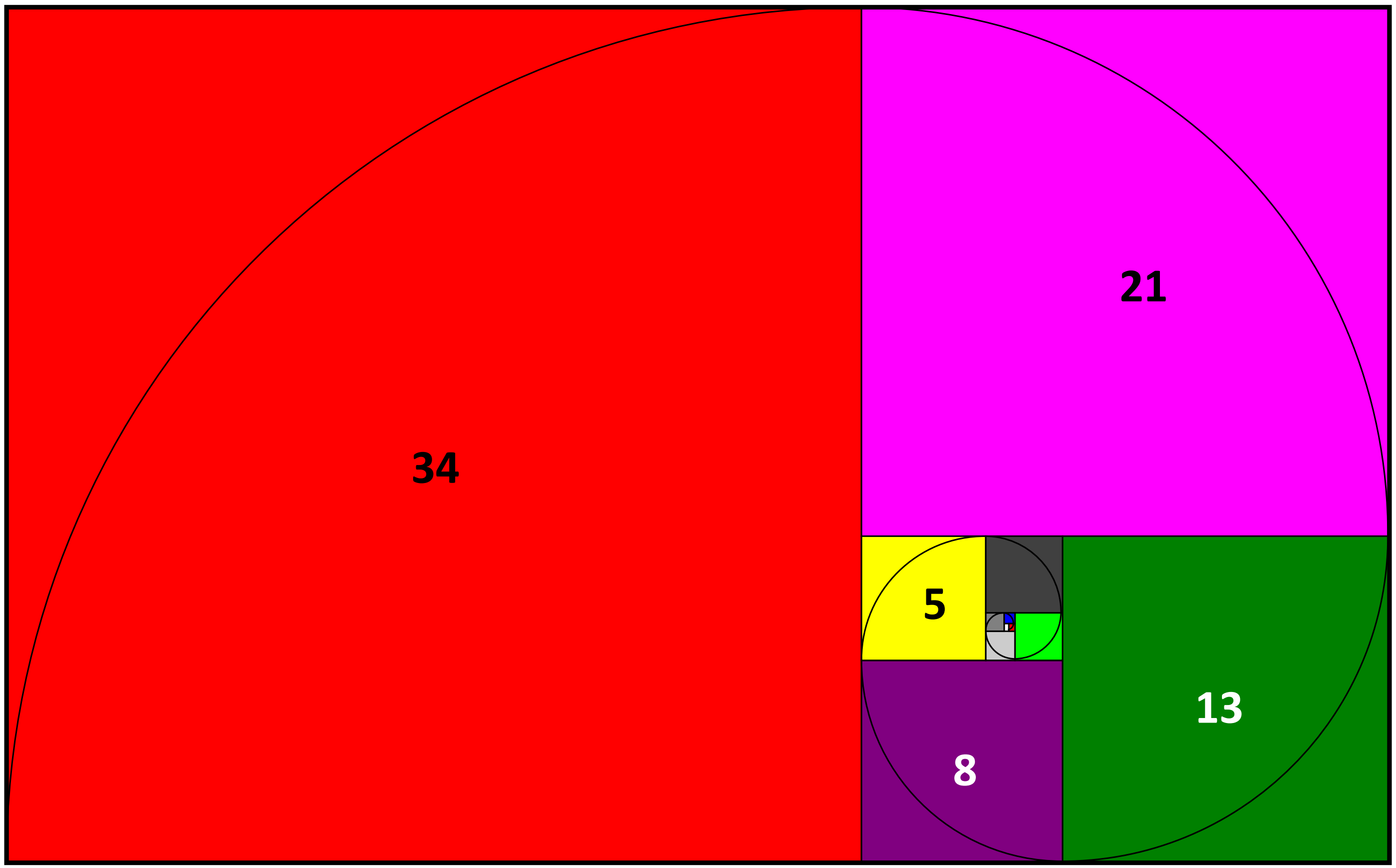
Gegeben sei ein Quadrat ABCD der Seitenlänge 1.
Mit einem Kreis um den Mittelpunkt O der Strecke BC und dem Radius OA (= $\frac{1}{2}\sqrt{5}$) werden die Punkte E und F auf der Geraden durch B und C konstruiert.
Konstruiert man die Punkte G und H als Schnittpunkte der Geraden AB, CD mit Kreisen um B und C mit dem Radius BE, so gilt:

$$EB = BG = CF = CH = \tfrac{1}{2}\sqrt{5} - \tfrac{1}{2} = (\sqrt{5} - 1)/2 = 1/\phi.$$
$$AG = AB + BG = 1 + 1/\phi = (\phi + 1)/\phi = \phi$$

Die Seiten des Rechtecks AGHD haben damit die Längen 1 und ϕ. Ein derartiges Rechteck wird goldenes Rechteck genannt.

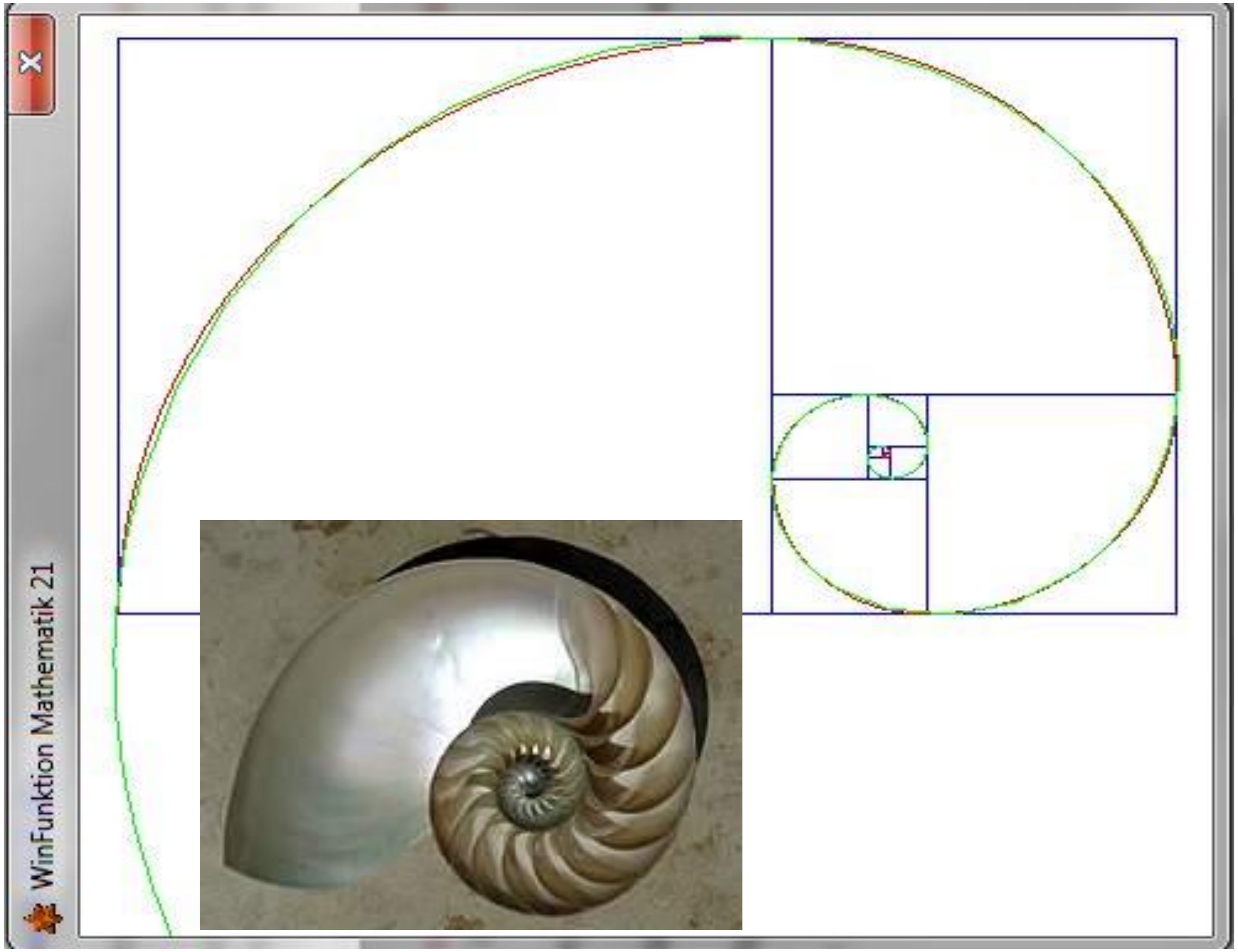
Aus: *WinFunktion 21 Mathematik*

Ein Goldenes Rechteck und Wachstumsspirale mit Viertelkreisen



Aus: *WinFunktion 21 Mathematik*

Nautilus und die Wachstumsspirale



Formeln der Spiralen:

Goldener Schnitt: Fragmente aus Viertel- Kreisen

Archimedische:
$r = a\,\varphi$

Hyperbolische:
$r = a/\varphi$

Logarithmische:
$r = a\,e^{m\varphi}$

Der Goldene Schnitt

Zeitlich-Astronomisches (Addition von Umlaufdauern)

1 Jupiter +	2 Sonnenjahre	=	3 Saturn
2 Jupiter +	3 Sonnenjahre	=	5 Saturn
3 Jupiter +	5 Sonnenjahre	=	8 Saturn
5 Jupiter +	8 Sonnenjahre	=	13 Saturn
8 Jupiter +	13 Sonnenjahre	=	21 Saturn
13 Jupiter +	21 Sonnenjahre	=	34 Saturn
21 Jupiter +	34 Sonnenjahre	=	55 Saturn
34 Jupiter +	55 Sonnenjahre	=	89 Saturn
55 Jupiter +	89 Sonnenjahre	=	144 Saturn
89 Jupiter +	144 Sonnenjahre	=	233 Saturn

Ein Jupiterumlauf addiert mit *zwei* Sonnenjahren ergibt *drei* Saturnjahre; *zwei* Jupiterumläufe addiert mit *drei* Sonnenjahren ergeben *fünf* Saturnjahre usw. Die Faktoren von Jupiter- und Sonnenjahr ergeben addiert also den Faktor des Saturnjahres. Das ist die erste Besonderheit dieser Beziehung der drei Umlaufzeiten. Zweitens gehören alle vorkommenden Faktoren der Reihe der Zahlen 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ... an. Diese Reihe des Goldenen Schnitts ergibt sich insgesamt *dreimal*, wenn man die *senkrechte* Aufeinanderfolge der Gleichungen ins Auge faßt. Auch hier haben wir es mit einer Offenbarung des Goldenen Schnitts zu tun, wie sie systematischer kaum gedacht werden kann. Auf höchst einfache und mathematisch vollendete Weise ergänzen sich die Umlaufzeiten der drei Himmelskörper. Dieser außergewöhnlichen Beziehung entspricht auch die verhältnismäßig hohe Genauigkeit. Nur um durchschnittlich 1,6 Tag differieren die Tageswerte der beiden jeweiligen Gleichungsseiten. Weiter fortgesetzt werden die Gleichungen allmählich ungenauer.

Aus: Musik und Kosmos als Schöpfungswunder; Frankfurt 1974

Der Goldene Schnitt in der Diagnostik

Phonokardiogramm: Verhältnis Diastole zu Systole

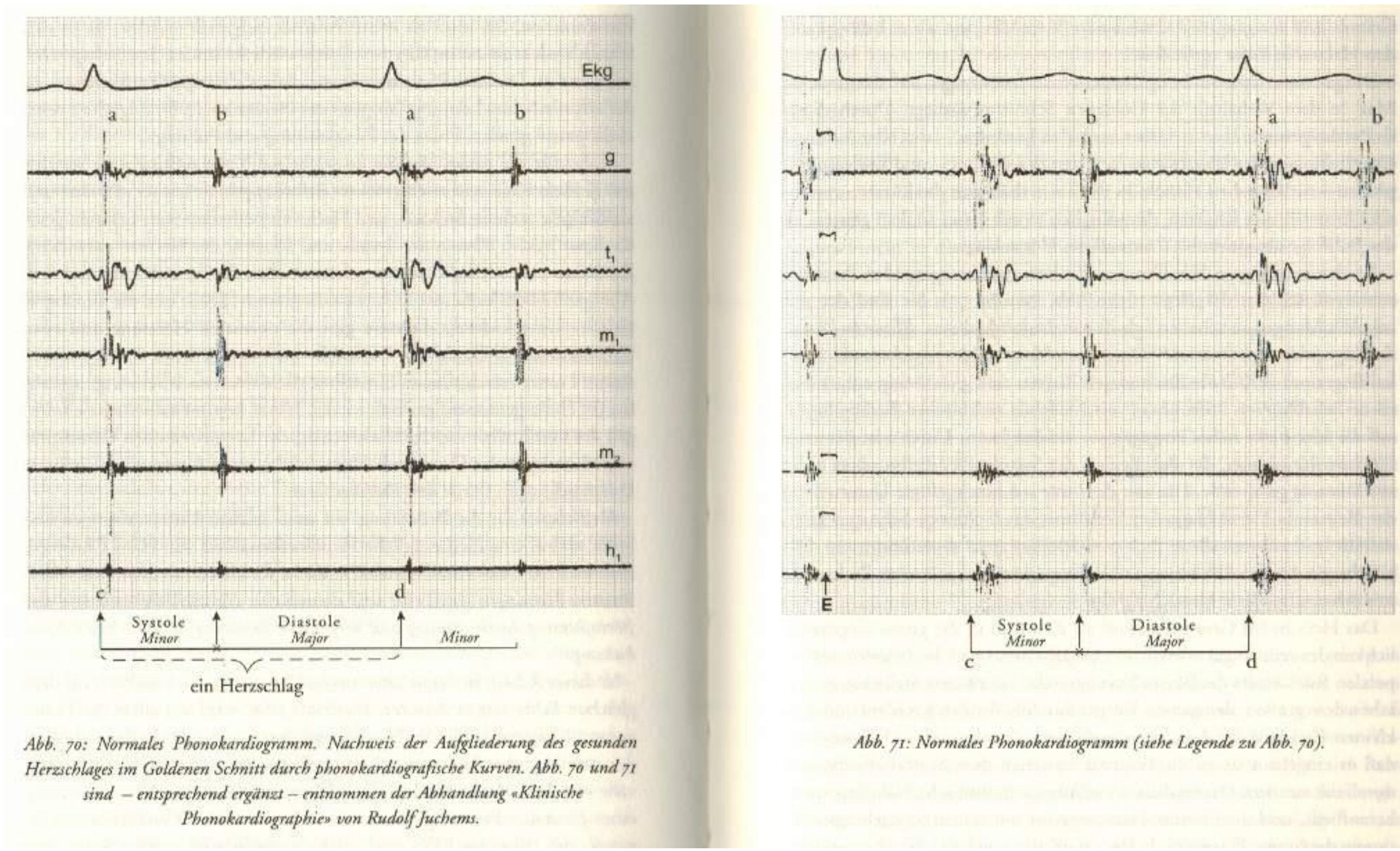


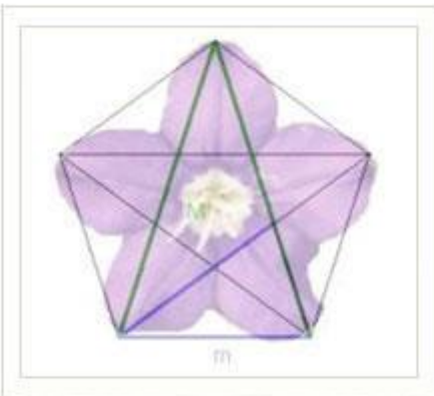
Abb. 70: Normales Phonokardiogramm. Nachweis der Aufgliederung des gesunden Herzschlages im Goldenen Schnitt durch phonokardiografische Kurven. Abb. 70 und 71 sind – entsprechend ergänzt – entnommen der Abhandlung «Klinische Phonokardiographie» von Rudolf Juchems.

Abb. 71: Normales Phonokardiogramm (siehe Legende zu Abb. 70).

Aus: Bühler, Walther; Das Pentagramm und der Goldene Schnitt als Schöpfungsprinzip; Stuttgart 2001

Der Goldene Schnitt in der Natur

Pentagramm



Glockenblume

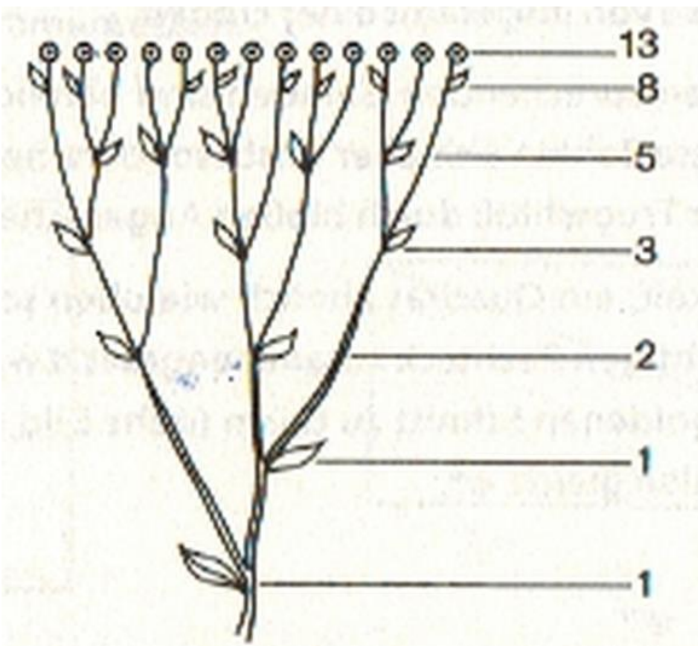
Akeleiblüte

In der Schöpfung finden wir sehr viele Blüten, beispielsweise die Akeleiblüte, die Glockenblume und die Heckenrose. Diese Blüten sind alle nach dem Muster des regelmäßigen Fünfecks konstruiert. So gibt es dutzende Blüten an einem Strauch und jede einzelne Blüte ist nach diesem Fünfeck gemacht. Das heißt also, in allen Blüten kommt der Goldene Schnitt vor mit dieser einmaligen Zahl Φ und zwar sehr exakt. Die Pflanzen machen nie einen Fehler, sondern immer ganz präzise Fünfecke. Woher weiß das aber die Pflanze? Wo hat sie etwas gelernt von Geometrie, wie man Fünfecke macht oder woher weiß die Pflanze die Zahl des Goldenen Schnittes? All diese Information ist im Erbgut, also in den DNA-Molekülen gespeichert. Hier hat der Schöpfer den Bauplan für eine Akeleiblüte hineingelegt, in diesem mikroskopisch kleinen Material liegt in der höchsten uns bekannten Speicherdichte die ganze Geometrie der Blüte drin. Aber nicht einmal die klügsten Wissenschaftler haben verstanden, wie Gott es da hinein programmiert hat.

Aus: http://www.was-darwin-nicht-wusste.de/wunder/mathematische-ueberraschungen.html

Was hat das mit dem Goldenen Schnitt zu tun ?

Zweig einer Nießwurz



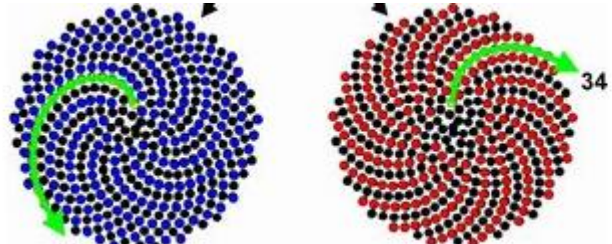
Aus: Der Goldene Schnitt, Mannheim 1988

Stengelloser Enzian
(Gentiana clusii)

Aus: SZ 9.12.2014
korrigiert von P. Döbbeler

Der Goldene Schnitt in der Natur

Blütenstand der Sonnenblume



http://www.golden-section.eu/kapitel5.html

Die Verteilung der Kerne im Korb der Sonnenblume ist nicht etwa zufällig, sondern mathematisch exakt versetzt um je 137,5°. Wie oben gelesen, ist dies genau die Gradzahl des Goldenen Winkels, der auch wieder auf die schöne Zahl des Goldenen Schnittes (1,618033...) zurückgeht.

Dass dieser Winkel von 137,5° wirklich der beste Versetzungswinkel für die Anzahl der im Korb befindlichen Sonnenblumenkerne ist, sieht man wenn der Winkel auch nur um 1° abweicht. Dieses eine Grad ist für das menschliche Auge nicht wahrnehmbar, aber es ist eine Katastrophe für eine Sonnenblume. So ist in absolut jedem Sonnenblumenkern der Goldene Schnitt einprogrammiert und die Sonnenblumen geben diese Zahl von Generation zu Generation weiter. Dazu kommt noch, dass der Winkel von 137,5° auch während des Wachstums des Sonnenblumenkorbes stets derselbe bleibt.

Jeder einzelne Kern im Sonnenblumenkorb gehört auch zu einer linksdrehenden und zu einer rechtsdrehenden Spirale. Das Besondere hieran ist jetzt, dass die Anzahl der Spiralen ausschließlich Fibonacci-Zahlen sind. Die Anzahl der links- und rechtsdrehenden Spiralen sind immer benachbarte Fibonacci-Zahlen. Bei Sonnenblumen findet man normalerweise die Kombination 21/34 oder 34/55 oder 55/89, bei besonders großen Sonnenblumen auch mal 89/144 oder 144/233.
Es ist aber nie eine andere Anzahl von Spiralen. Hier stellt sich doch die Frage, woher die Sonnenblumen die Fibonacci-Zahlen so genau kennen?

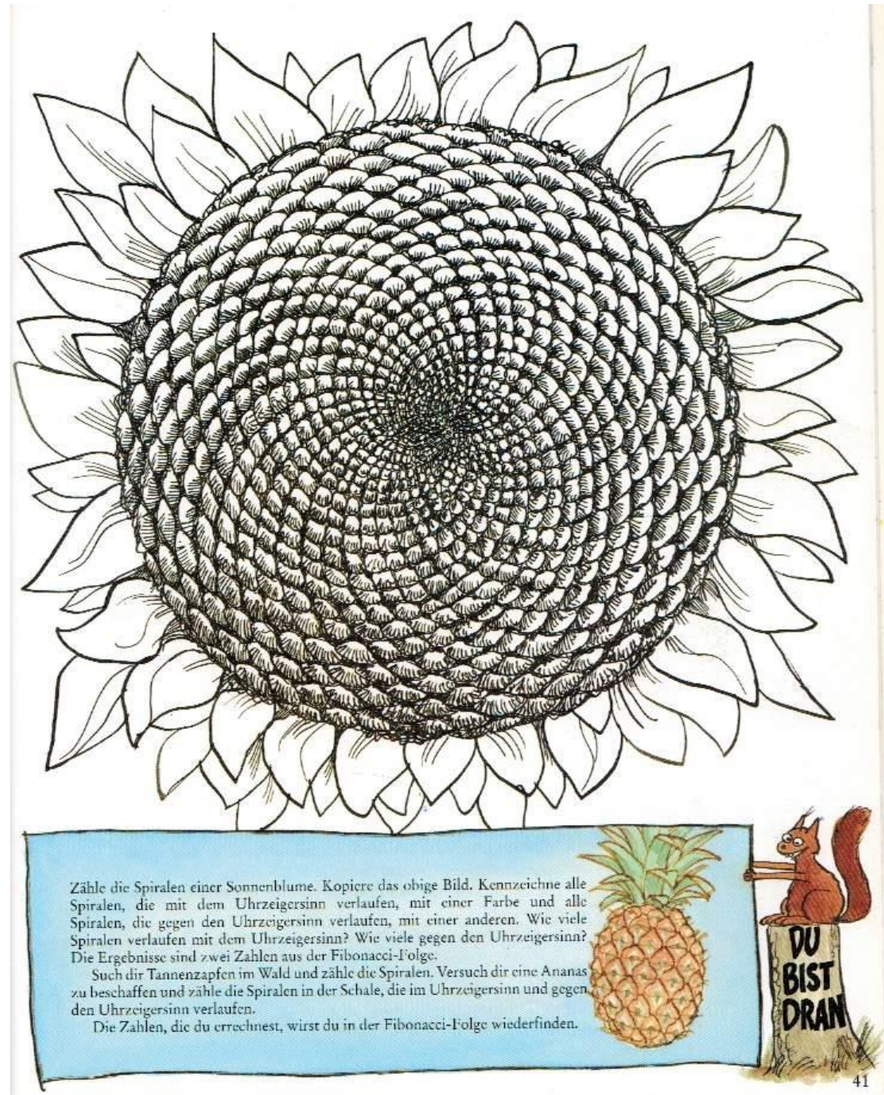
Dieses Prinzip gilt aber nicht nur für Sonnenblumen, sondern beispielsweise auch bei Gänseblümchen, bei Tannenzapfen, bei Pinienzapfen, beim Kohl und bei der Ananas. Überall finden wir links- und rechtsdrehende Spiralen die genau dem Zahlenwert zweier benachbarter Fibonacci-Zahlen entsprechen - es gibt absolut keine Ausnahmen. Auch die Anzahl der Blattspiralen bei Palmen sind immer Fibonacci-Zahlen.

Aus: http://www.was-darwin-nicht-wusste.de/wunder/mathematische-ueberraschungen.html

Der Goldene Schnitt in der Natur

Blütenstand der Sonnenblume

Aus: Dahl+Nordquist: Zahlen, Spiralen und magische Quadrate, F. Oetinger Verlag Hamburg

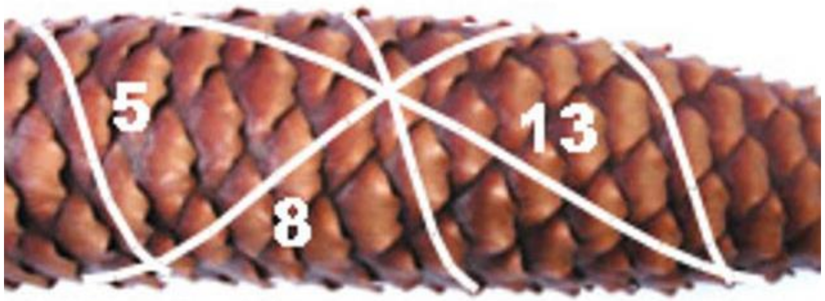

Zähle die Spiralen einer Sonnenblume. Kopiere das obige Bild. Kennzeichne alle Spiralen, die mit dem Uhrzeigersinn verlaufen, mit einer Farbe und alle Spiralen, die gegen den Uhrzeigersinn verlaufen, mit einer anderen. Wie viele Spiralen verlaufen mit dem Uhrzeigersinn? Wie viele gegen den Uhrzeigersinn? Die Ergebnisse sind zwei Zahlen aus der Fibonacci-Folge.

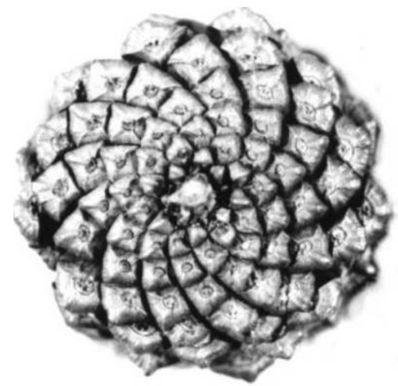
Such dir Tannenzapfen im Wald und zähle die Spiralen. Versuch dir eine Ananas zu beschaffen und zähle die Spiralen in der Schale, die im Uhrzeigersinn und gegen den Uhrzeigersinn verlaufen.

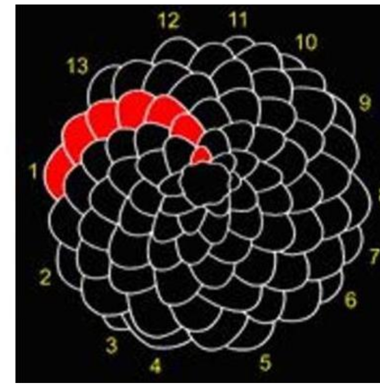
Die Zahlen, die du errechnest, wirst du in der Fibonacci-Folge wiederfinden.

Der Goldene Schnitt in der Natur

- Tannenzapfen; Pinienzapfen; Ananas



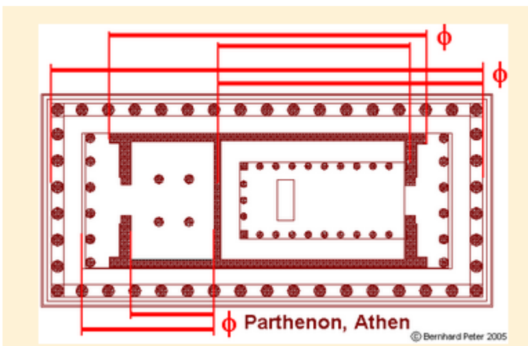


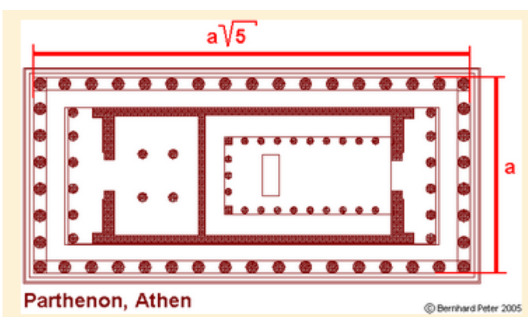


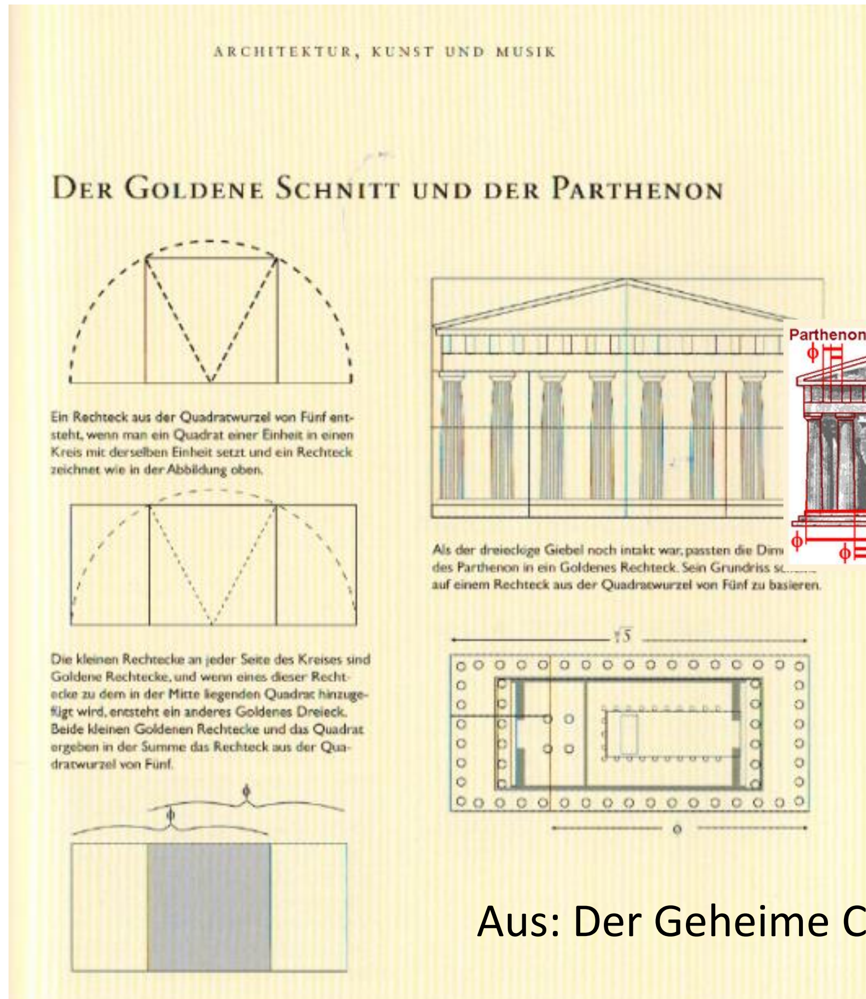
Aus: http://www.was-darwin-nicht-wusste.de/wunder/mathematische-ueberraschungen.html

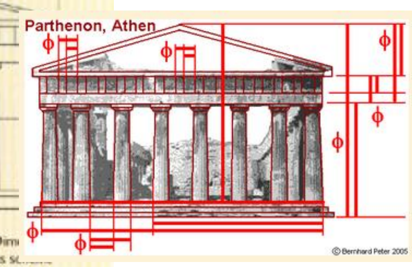
Der Goldene Schnitt in der Kultur

Architektur



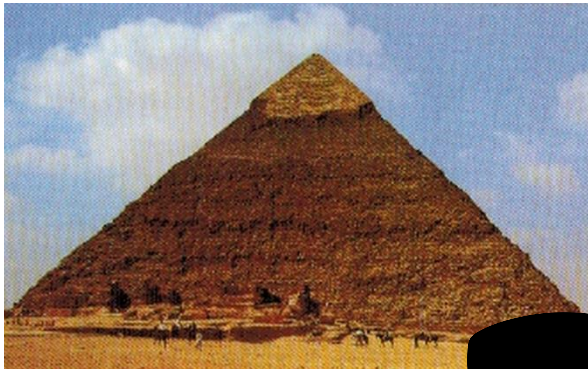






Aus: Der Geheime Code, Köln 2008

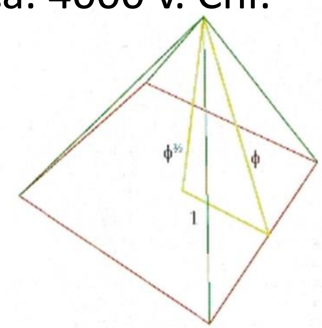
Der Goldene Schnitt in der Architektur



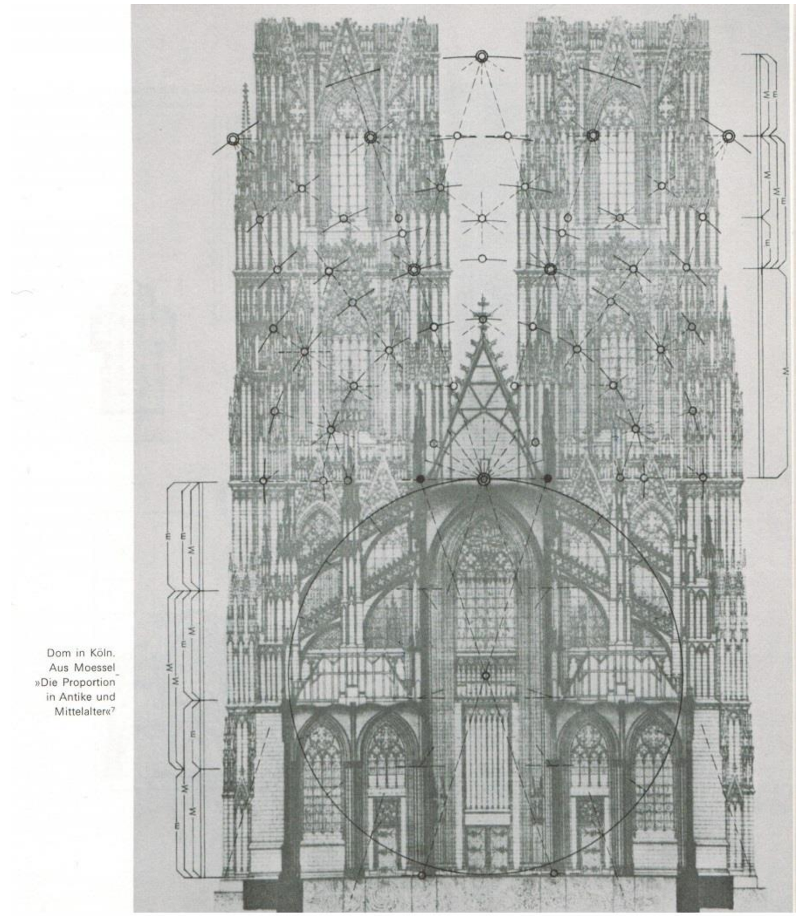
Die Cheopspyramide (Giseh)

Erbaut ca. 4000 v. Chr.

?



Dieses Diagramm zeigt das mathematische Verhältnis zwischen der Höhe der Pyramide, seiner Seiten und dem Goldenen Schnitt.

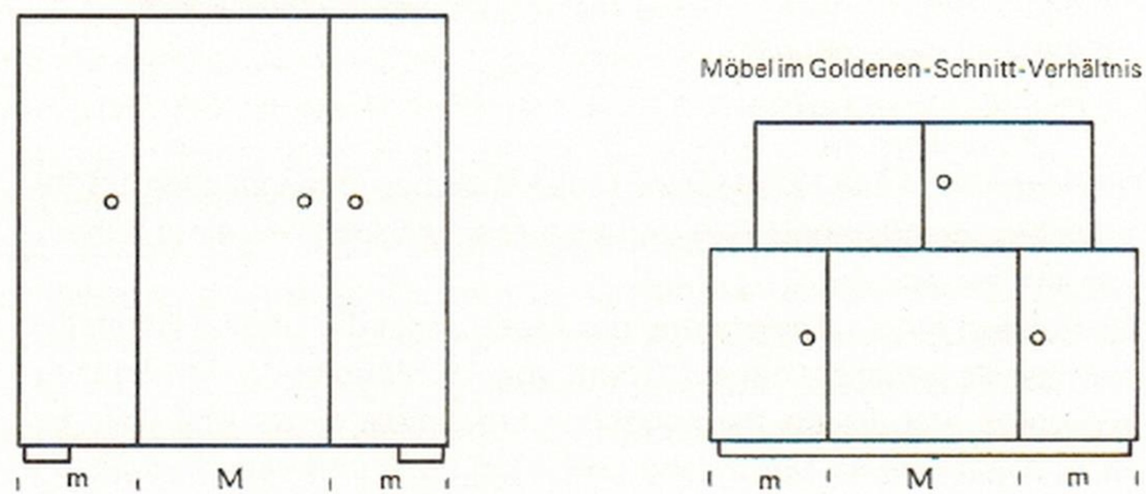


Aus: Der Geheime Code, Köln 2008

Aus: Der Goldene Schnitt, Augsburg 1990

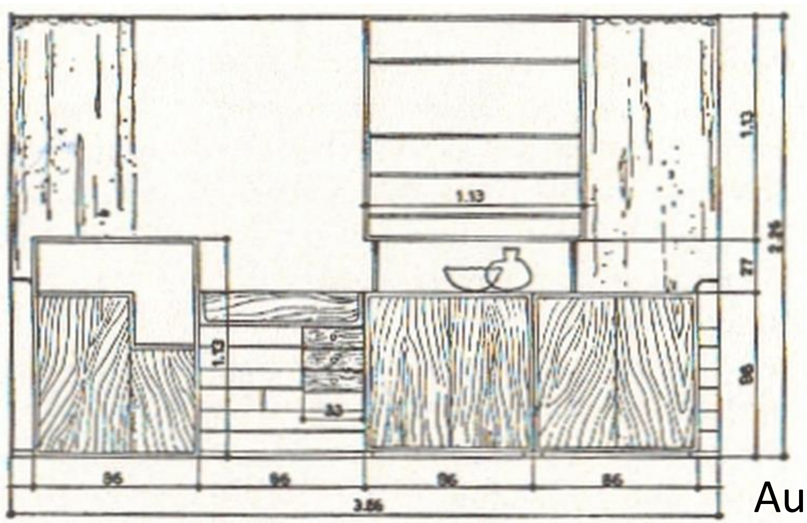
Der Goldene Schnitt in der Architektur

- Möbel



Möbel im Goldenen-Schnitt-Verhältnis

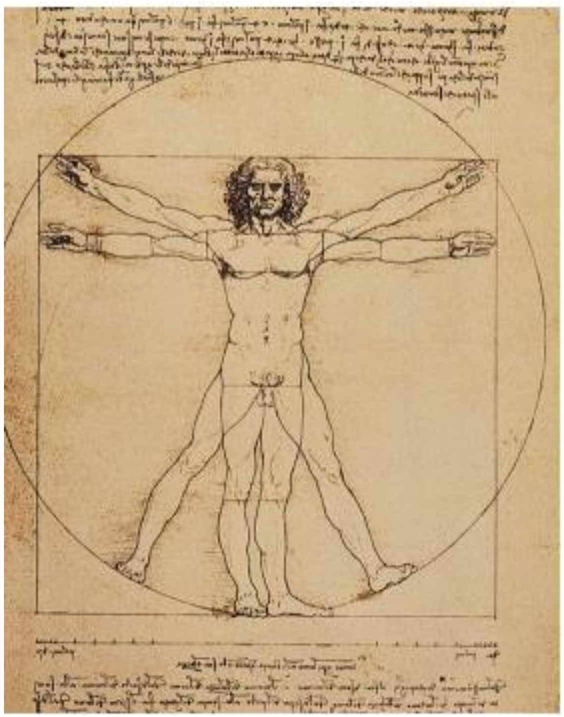
Möbel nach den
Modulormaßen
von Le Corbusier
Aus Le Corbusier
»Der Modulor«[3]



Aus: Der Goldene Schnitt, Augsburg 1990

Der Goldene Schnitt in der Kunst

Leonardo da Vinci



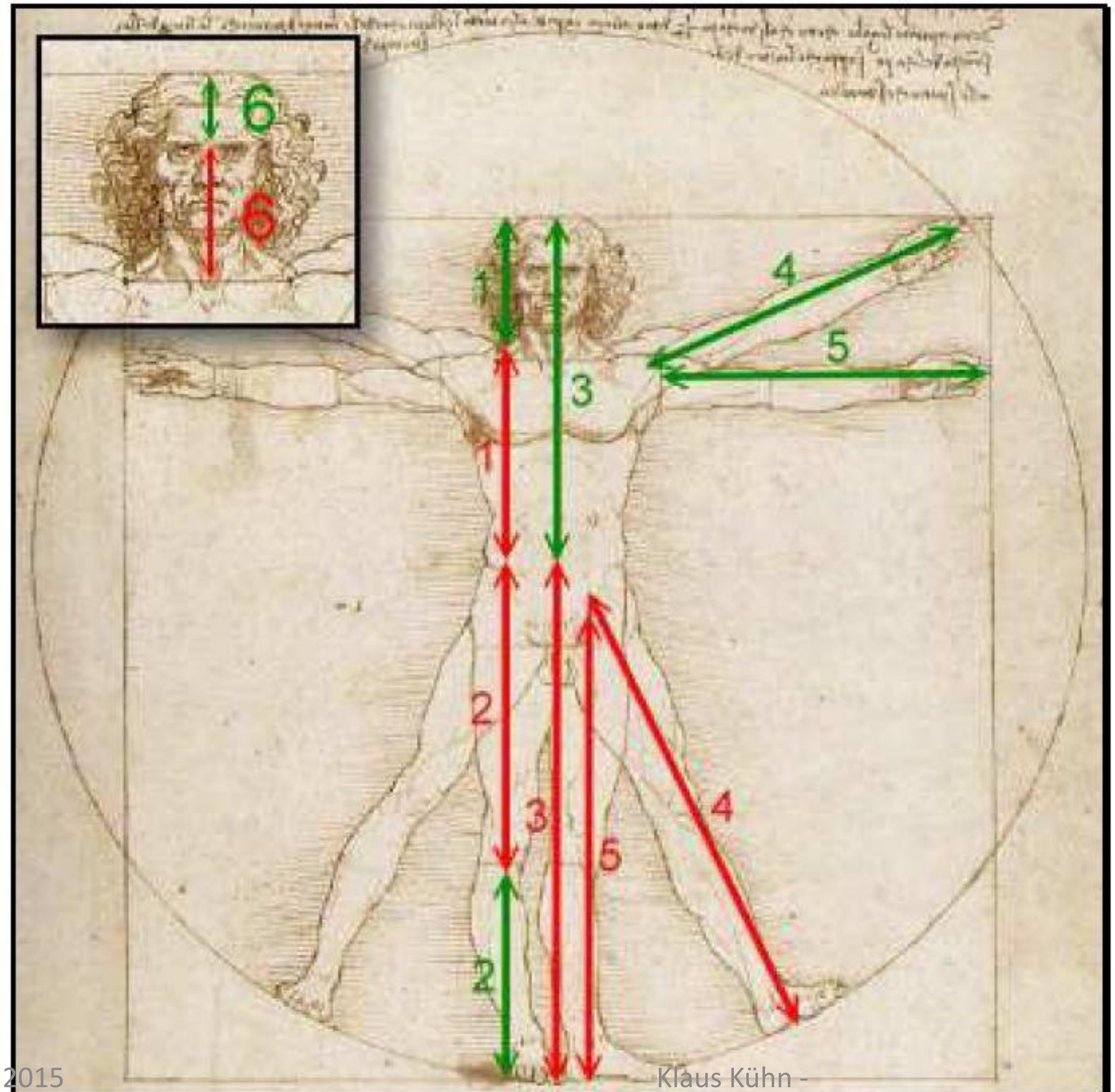
Proportionsstudie nach Vitruv
Ca. 1500

Zeichnung von da Vinci für Luca Paciolis Werk "De Divina Proportione" nach einem Manuskript des römischen Gelehrten Vitruvius.

"Der Baumeister Vitruvius behauptet in seinem Werk über die Baukunst, dass die Maße des Menschen von der Natur so geordnet seien, dass vier Finger eine Handbreite, vier Handbreiten eine Fuß, sechs Handbreiten eine Elle, vier Ellen die Größe des Menschen, sowie einen Schritt, und vierundzwanzig Handbreiten die Größe des Menschen ausmachen. Und diese Maße in seinen Bauten enthalten. Wenn du die Beine so weit spreizt, dass du um ein Vierzehntel deiner Größe abnimmst, und wenn du dann deine Arme ausbreitest und hebst bis du die Scheitellinie des Kopfes mit deinen Mittelfingern berührst, so musst du wissen, dass der Mittelpunkt des Kreises, der durch die Enden der gestreckten Gliedmaße gebildet wird, der Nabel ist und dass der Zwischenraum zwischen den Beinen ein gleichseitiges Dreieck bildet.
Die Spanne der ausgebreiteten Arme des Menschen ist gleich seiner Höhe.
Der Abstand von Haaransatz bis zum Rand des Unterkinns ist ein Zehntel der Größe des Menschen, der vom unteren Rand des Kinns bis zum Scheitel des Kopfes ist ein Achtel der Größe des Menschen, der vom oberen Rand der Brust bis zum Scheitel des Kopfes ein Sechstel des Menschen, ..."
(nach Uhlmann)

Aus: ***WinFunktion 21 Mathematik***

Der Goldene Schnitt in der Kunst

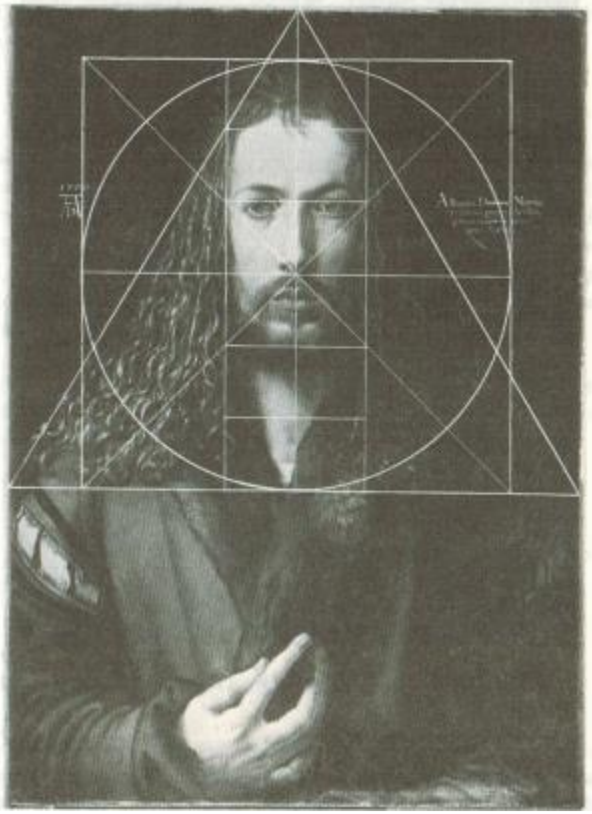


Aus dem Internet

Der Goldene Schnitt in der Kunst

Albrecht Dürer (Was hat das mit dem Goldenen Schnitt zu tun ?)

Wir betrachten nun sein **Münchner Selbstbildnis** von 1500.



Dieses feierliche Bild hat schon immer zu Untersuchungen und Spekulationen Anlaß gegeben. Allerdings dürfte durch Franz WINZINGERs Konstruktionsschema der Streit um das Geheimnis der Bildgesaltung beigelegt worden sein, zumal WINZINGERs Deutung durch eine Notiz aus Dürers Dresdner Skizzenbuch erhärtet wird. WINZINGER schreibt:

> *Wendet man sich nun der Darstellung zu, so wird auch dem flüchtigen Betrachter auffallen, daß der Kopf mit den wallenden Locken ein regelmäßiges Dreieck bildet. Zeichnet man dieses ein, so stellt sich heraus, daß es sich nicht nur um ein gleichseitiges Dreieck handelt, dessen Spitze mit der Mitte des oberen Bildrandes zusammenfällt, sondern daß die Basis dieses Dreiecks zugleich die Höhe der ganzen Bildtafel genau im goldenen Schnitt teilt.*

Die Basis des goldenen Dreiecks trifft auch die untere Spitze des weißen Hemdausschnitts. Ferner fällt auf, daß die beiden vertikalen Linien, die das Gesicht seitlich begrenzen, die Breite des Bildes (fast) im goldenen Schnitt teilen.

Aus: Der Goldene Schnitt, Mannheim 1988

Der Goldene Schnitt in der Musik

10.4 Der goldene Schnitt und die Musik

Der goldene Schnitt tritt innerhalb der Musik in zwei Rollen auf. Zum einen können zwei Töne (genauer gesagt: ihre Frequenzen) ein goldenes Verhältnis haben; andererseits kann die Komposition eines Stückes aus Teilen bestehen, deren Längen sich verhalten wie der goldene Schnitt.

Wenden wir uns zunächst dem ersten Phänomen zu.

Stehen die Frequenzen zweier Töne im Verhältnis der Fibonacci-Zahlen 8 : 5 (bzw. 5 : 8), so bildet sich als Klang eine **kleine Sexte**. Die Differenz des Verhältnisses 8 : 5 (= 1,6) zum goldenen Schnitt (= 1,618...) sei so gering, daß, wie HAASE behauptet, der goldene Schnitt *selbstverständlich in den Zurechthörbereich der kleinen Sexte fällt*. HAASEs Vorstellung ist also die, daß der Reiz der kleinen Sexte darin begründet ist, daß die Frequenzen ihrer Einzeltöne im goldenen Verhältnis stehen, und daß das einfache Verhältnis 8 : 5 nur eine Annäherung daran ist:

> *Es läßt sich mithin eine sehr interessante Wechselbeziehung feststellen: Während einerseits mathematisch die Proportion 5 : 8 als Näherungslösung oder Ersatz für den goldenen Schnitt betrachtet werden kann, erweist sich ästhetisch umgekehrt der goldene Schnitt als Akzent und Belebung gerade dieser einfachen Proportion!*

*

Angesichts der intimen Beziehung von besonders reizvoll empfundenen Klängen zum goldenen Schnitt erscheint es nicht verwunderlich, daß der goldene Schnitt im Instrumentenbau seit alters Verwendung findet. Insbesondere im Geigenbau scheint der goldene Schnitt seit alters als Geheimmittel zur Erreichung besonders klangschöner Instrumente benutzt worden zu sein.

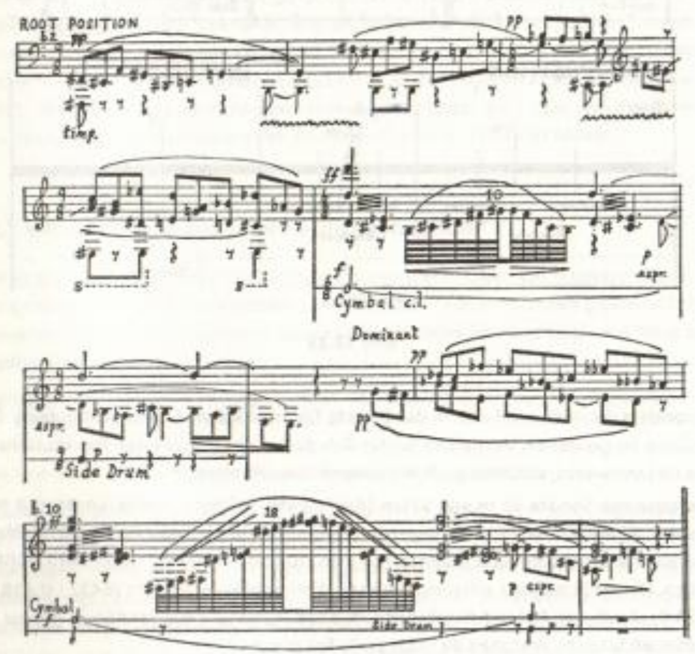
*

Nun kommen wir zur zweiten, wesentlich deutlicher erfahrbaren Erscheinungsform des goldenen Schnitts in der Musik, nämlich sein Einsatz bei der Komposition einzelner Teile zu einem Ganzen.

Über die Verwendung des goldenen Schnittes in Kompositionen von G. **Dufay** haben wir schon im Abschnitt **10.1** hingewiesen. In der Zeit nach der Renaissance tritt der goldene Schnitt in der Musik nur zufällig auf. Zwar gibt es immer Seher, die den goldenen Schnitt in einer Bachschen Fuge, einem Streichquintett von Haydn, oder Stücken von Beethoven oder Mozart entdeckt haben wollen; solche Entdeckungen sind aber mit großer Vorsicht zu genießen. Häufig wird einfach eine sehr grobe Approximation an ϕ schon als der goldene Schnitt angesehen. Immerhin scheint der kaiserliche Hofkompositeur Johann Josef **Fux** (1660 - 1741) den goldenen Schnitt in seinen Werken (etwa dem **Te Deum** K 270) *in raffinierter Weise* (NAREDI-RAINER) benutzt zu haben.

*

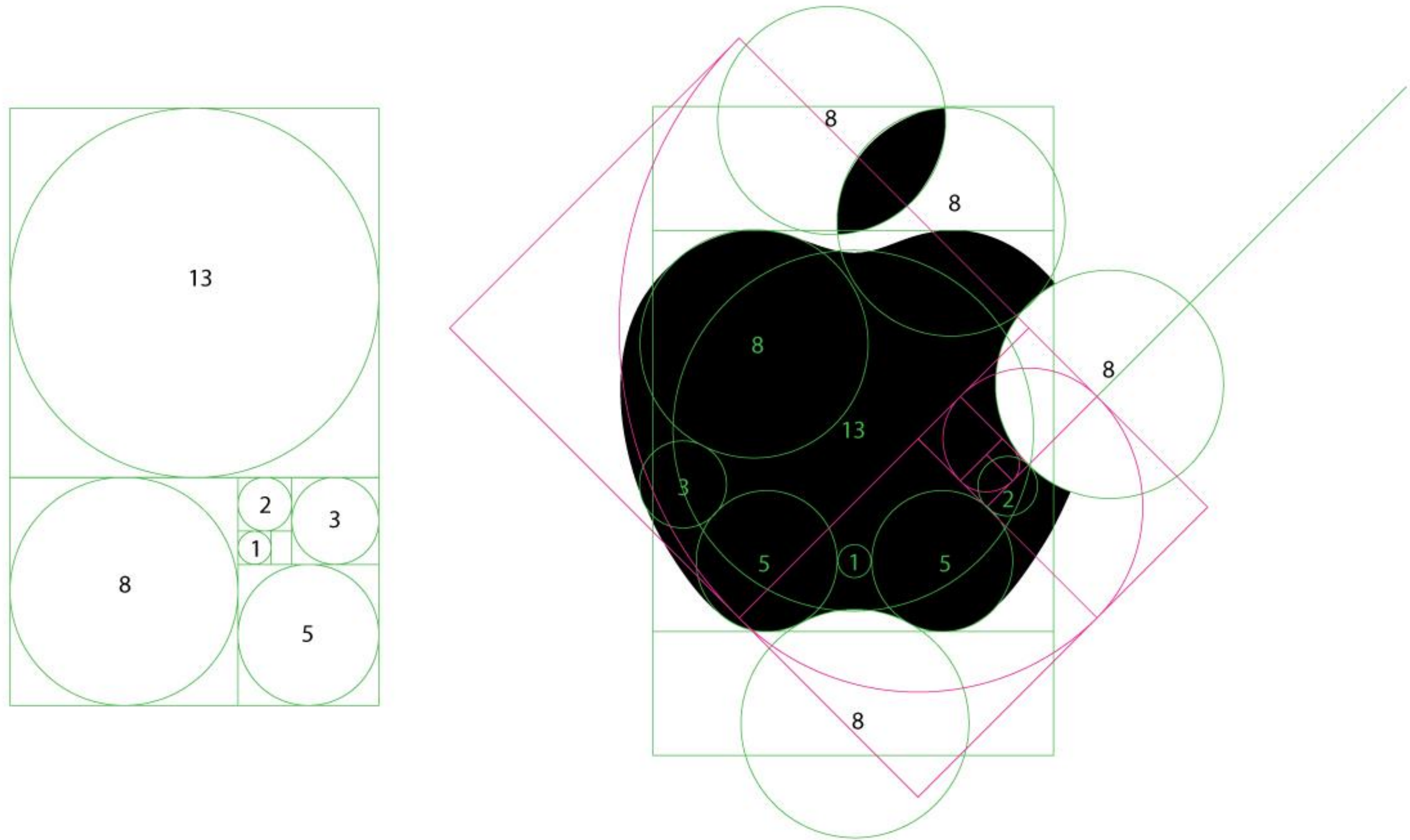
In massiver und ganz spektakulärer Weise findet sich der goldenen Schnitt jedoch nach Meinung von Ernö LENDVAI in den Werken des ungarischen Komponisten **Béla Bartók** (1881 - 1945). In einer gründlichen Analyse der Werke Bartóks zeigt LENDVAI, daß Bartók den goldenen Schnitt und Fibonacci-Zahlen als Gestaltungsprinzipien häufig einsetzte.



Aus: Der Goldene Schnitt, Mannheim 1988

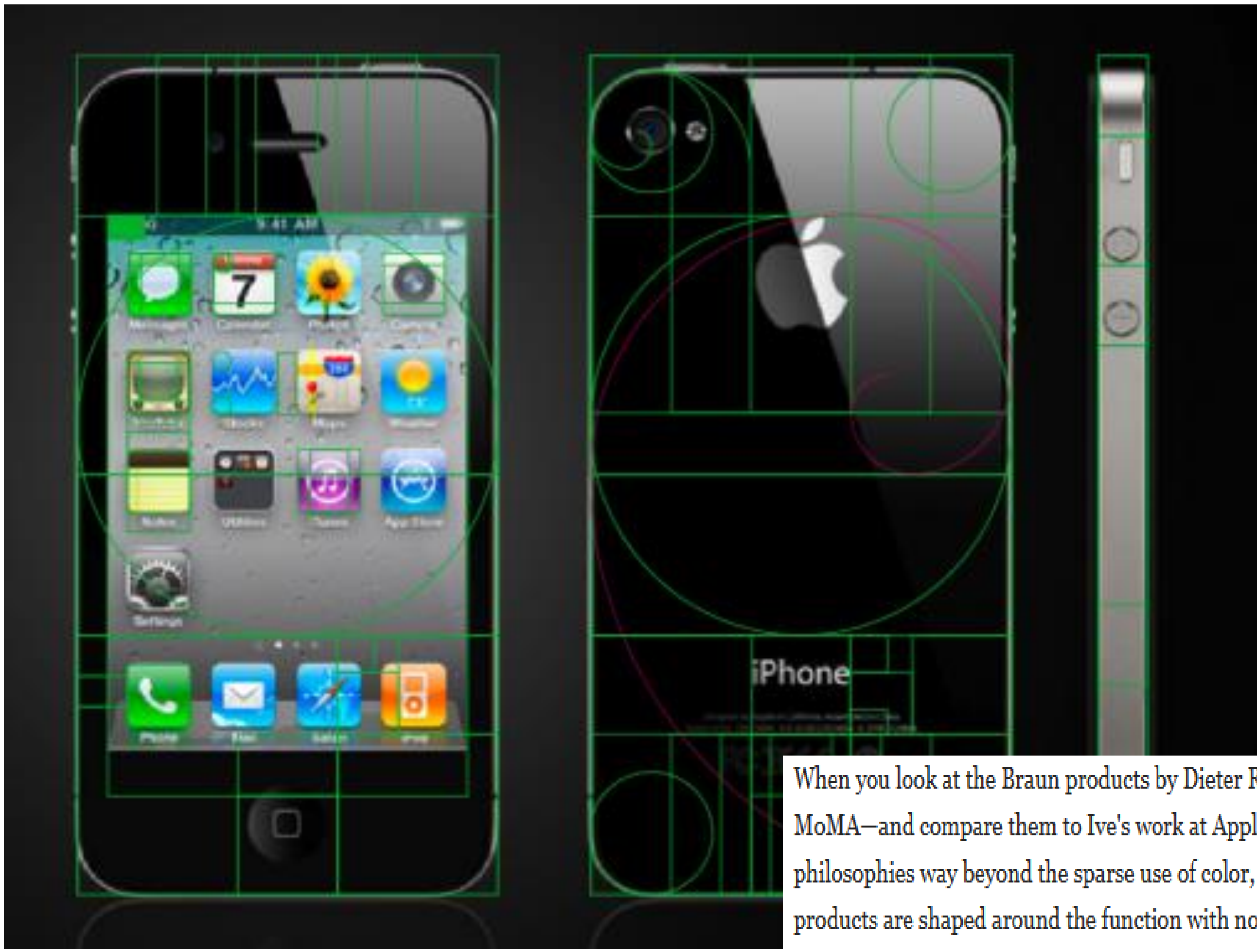
Der Goldene Schnitt in der Gestaltung

Der Goldene Schnitt in der Gestaltung



@barcelosthiago

Der Goldene Schnitt in der Gestaltung



When you look at the Braun products by Dieter Rams—many of them at New York's MoMA—and compare them to Ive's work at Apple, you can clearly see the similarities in their philosophies way beyond the sparse use of color, the selection of materials and how the products are shaped around the function with no artificial design, keeping the design "honest."

http://gizmodo.com/343641/1960s-braun-products-hold-the-secrets-to-apples-future

Der Goldene Schnitt in der Gestaltung

Goldener Schnitt - Weitere Anwendungen

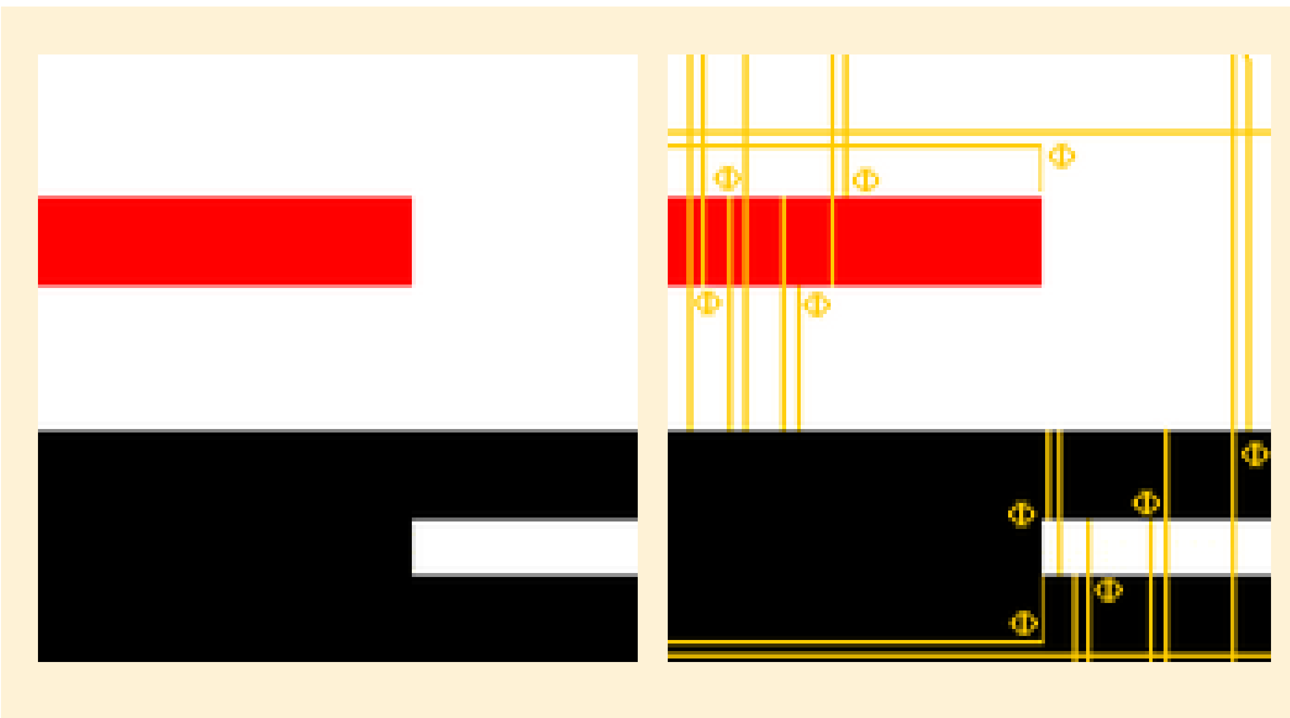
Aus: ***WinFunktion 21 Mathematik***

Selbst im Film wurde auf den goldenen Schnitt geachtet.
Berühmtestes Beispiel ist der Film "Panzerkreuzer Potemkin" von Sergej Eisenstein (1925). Eisenstein teilt das Bild bei besonders wichtigen Szenen im goldenen Schnitt.
Durch "The New Oxford Companion to Music" wurde weiterhin nachgewiesen, dass Stradivari zur Konstruktion seiner berühmten Violinen den goldenen Schnitt nutzte. 1996 untersuchte Mike Kay eine Vielzahl von Mozarts Sonaten. Er konnte zeigen, dass der geniale Musiker diese stets in zwei Abschnitte unterteilte; im Verhältnis des goldenen Schnittes. Ähnliches wurde auch bei Beethovens 5.Sinfonie nachgewiesen.
Untersucht man die Konstruktion moderner Montain-Bikes, so stellt man fest, dass deren Konstruktion sowohl in Höhe als auch Breite den goldenen Schnitt aufweist.

Der Goldene Schnitt in der Kunst

Konkrete Kunst: Jo Niemeyer – bewusster Einsatz des GS -

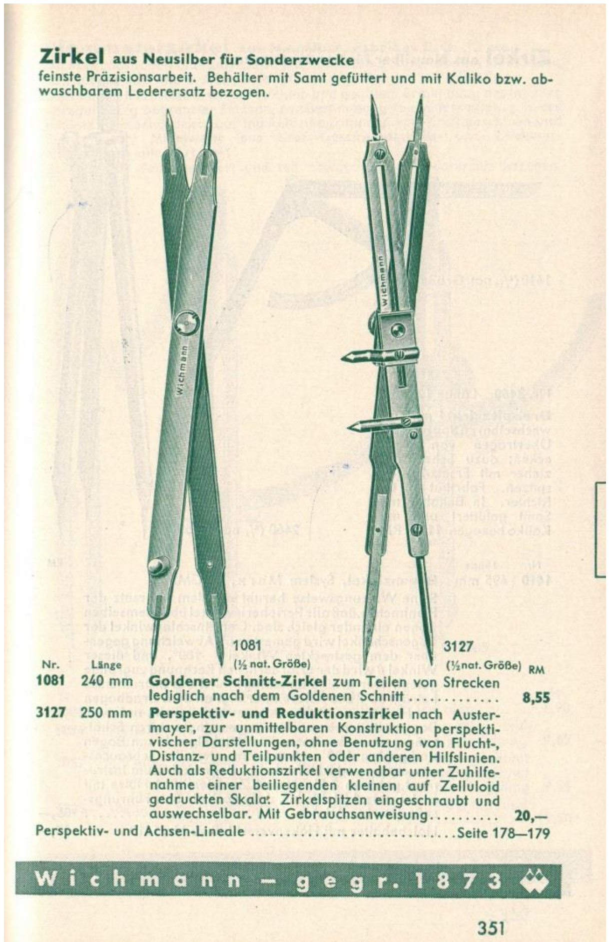
Neben seiner Arbeit als Maler und Gestalter widmet Jo Niemeyer sich vor allem der Forschung um die wissenschaftliche Betrachtungsweise des Goldenen Schnitts.



Aus: http://www.dr-bernhard-peter.de/Goldsch/niemeyer2.htm

Aus Wikipedia: Skulptur in der Kunsthalle Villa Kobe, 2003

Zeichen(Rechen)hilfen für den Goldenen Schnitt



Zirkel aus Neusilber für Sonderzwecke
feinste Präzisionsarbeit. Behälter mit Samt gefüttert und mit Kaliko bzw. abwaschbarem Ledererersatz bezogen.

1081 (½ nat. Größe)

3127 (½ nat. Größe)

Nr.	Länge		RM
1081	240 mm	**Goldener Schnitt-Zirkel** zum Teilen von Strecken lediglich nach dem Goldenen Schnitt	8,55
3127	250 mm	**Perspektiv- und Reduktionszirkel** nach Austermayer, zur unmittelbaren Konstruktion perspektivischer Darstellungen, ohne Benutzung von Flucht-, Distanz- und Teilpunkten oder anderen Hilfslinien. Auch als Reduktionszirkel verwendbar unter Zuhilfenahme einer beiliegenden kleinen auf Zelluloid gedruckten Skala. Zirkelspitzen eingeschraubt und auswechselbar. Mit Gebrauchsanweisung	20,—

Perspektiv- und Achsen-Lineale ....Seite 178—179

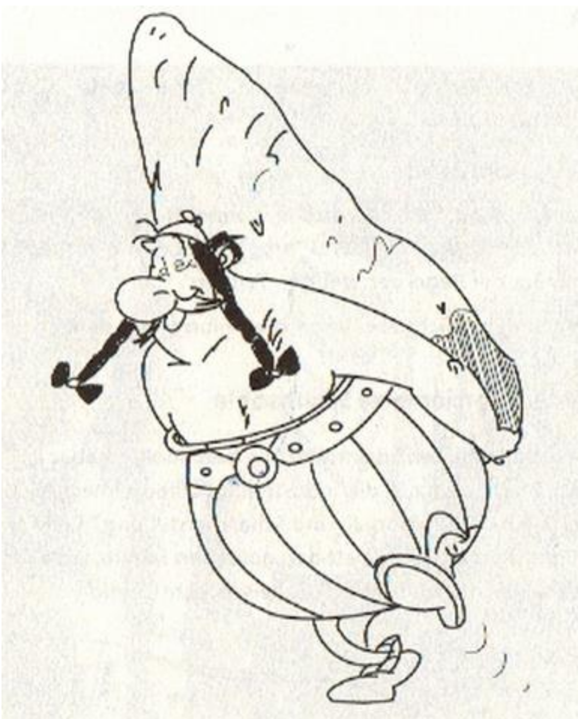
Wichmann – gegr. 1873

351

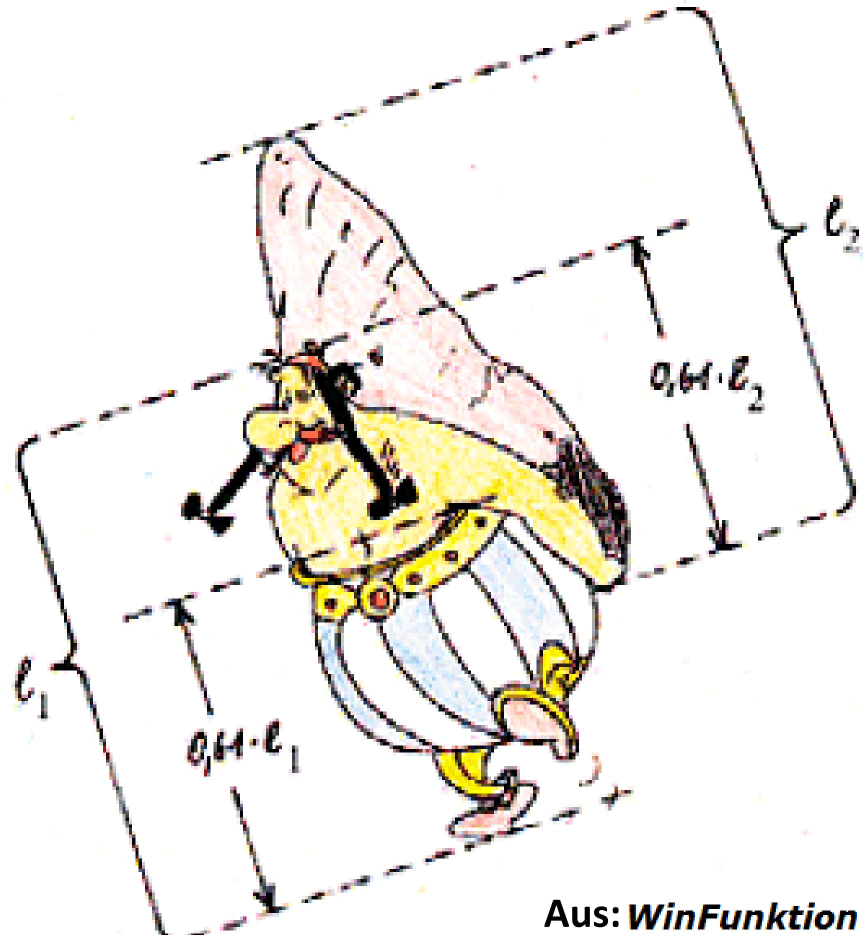
„Pantograph“

Der Goldene Schnitt in der Kunst

Zeichnungen



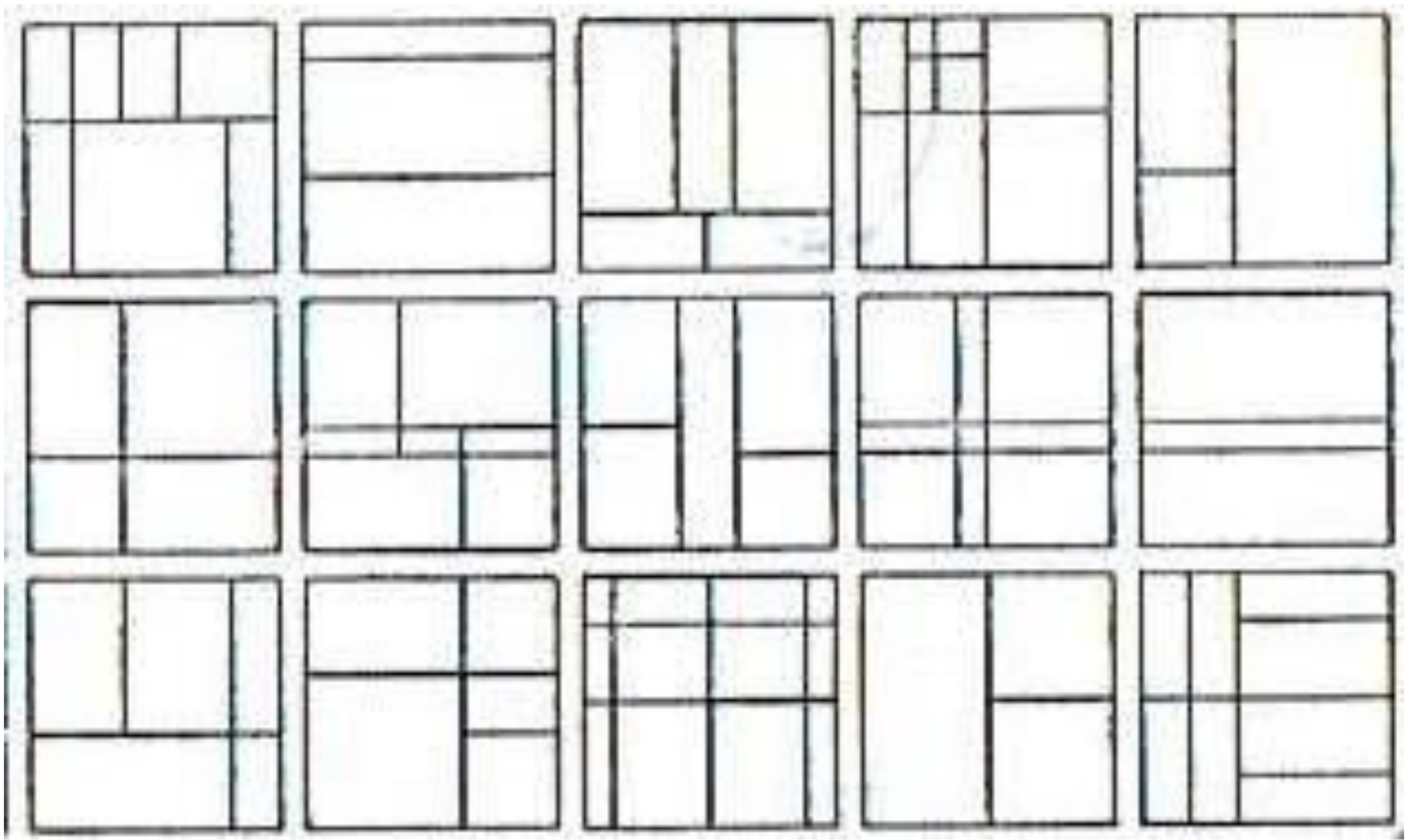
Aus: Der Goldene Schnitt, Zürich 1989



Aus: ***WinFunktion 21 Mathematik***

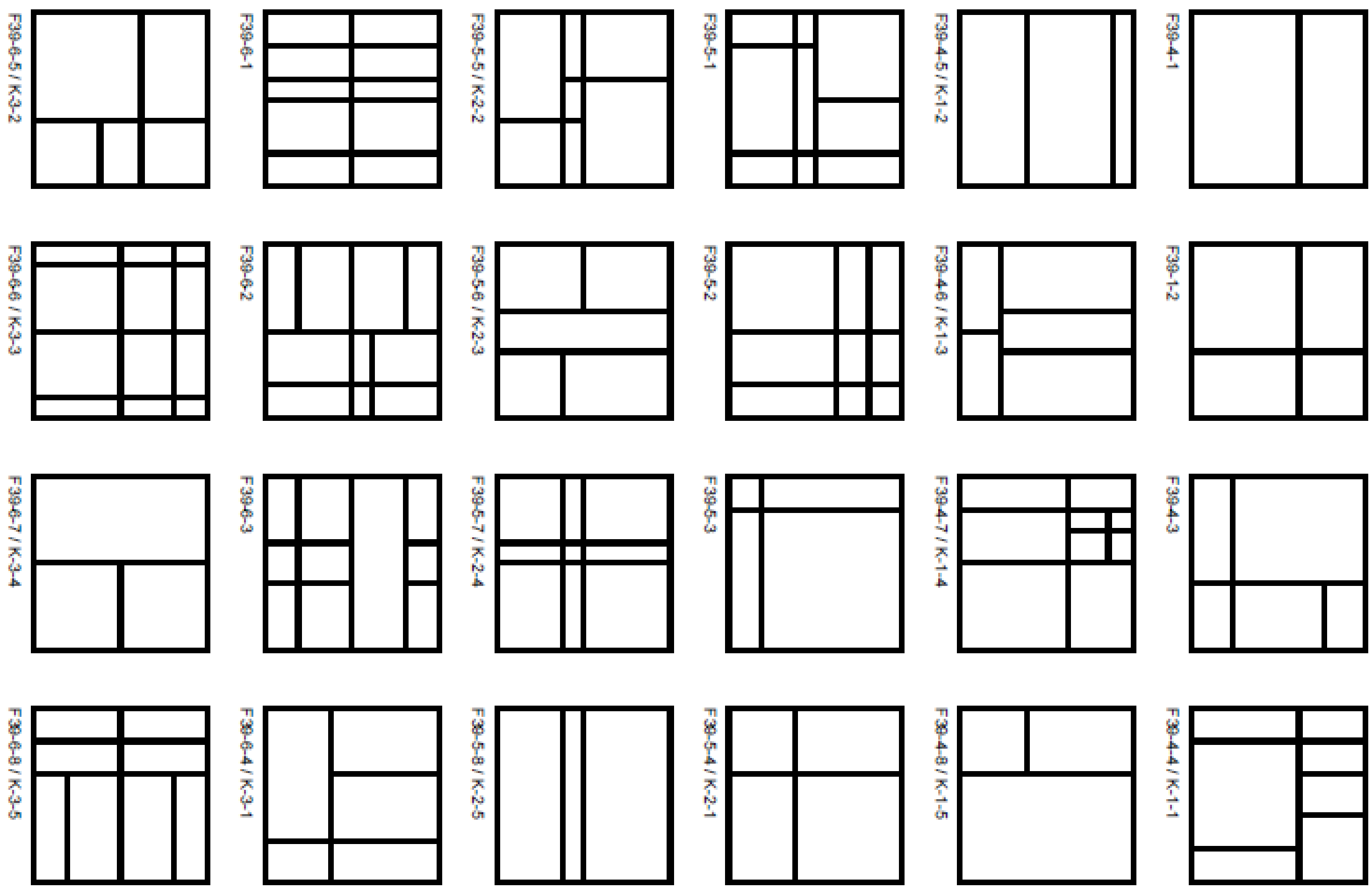
Was hat das mit dem Goldenen Schnitt zu tun ?

- Ausmalen von Quadraten aus Modulor



Nach Le Corbusier „Der Modulor“

nacherstellt von Karl Kleine



Der Goldene Schnitt in der Fotografie

Hier das Bild mit dem Gestaltungsraster.

Nach http://www.kleine-fotoschule.de/bildgestaltung/goldener-schnitt.html

Zentrale Positionierung des Hauptmotivs wirkt häufig zu statisch und langweilig. Doch auch hier gibt es natürlich beachtenswerte Ausnahmen. Die folgenden Tipps sollten daher nicht zu eng gefasst werden.
Eine der wichtigsten bildgestalterischen Regeln bei der Positionierung des Motivs ist der "**Goldene Schnitt**".
Bei der Bildgestaltung nach dem "Goldenen Schnitt" wird eine Strecke nach folgendem Verhältnis geteilt: Die Teilstrecke **a** verhält sich zur kleineren Teilstrecke **b** wie die Gesamtstrecke **a+b** zu **a.**

Anhand dieser Regel kann ein Raster geschaffen werden, anhand dessen die bildbestimmenden Elemente ausgerichtet werden können. Das Hauptmotiv sollte an den Schnittpunkten oder entlang der gedachten Linien platziert werden. Die nebenstehende Aufnahme wirkt in ihrer Bildgestaltung wegen ihrer Reduktion und der strikten Anwendung des "Goldenen Schnitts" sehr harmonisch.

Diese Regel wirkt sehr theoretisch, leichter umsetzbar ist die "Drittel-Regel".

Um Spannung im Bild aufzubauen können diese Gestaltungsregeln auch bewusst gebrochen werden. Dennoch ist es gerade für den Anfänger hilfreich sich mit diesen Regeln auseinanderzusetzen.

Wo sind Major und Minor ?
Ein Kommentar von Bernhard Peter

Immer schön kritisch bleiben!

Der Goldene Schnitt ist ein Mythos. Viele Autoren sind so begeistert vom Goldenen Schnitt, dass sie ihn überall sehen. In der Tat kann man den Goldenen Schnitt irgendwie in jedes Gebäude, jedes Gemälde etc. hineinmessen. Irgendeine Linie wird schon passen!...

1. **Ist der Goldene Schnitt tatsächlich mit akzeptabler Toleranz vorhanden?**
2. **Ist das Vorkommen des Goldenen Schnittes an dieser Stelle für das Objekt signifikant?**
3. **Kannte der Schöpfer des Objektes den Goldenen Schnitt?**
4. **Wenn ja, wollte er ihn mit Absicht benutzen?**

Deshalb:

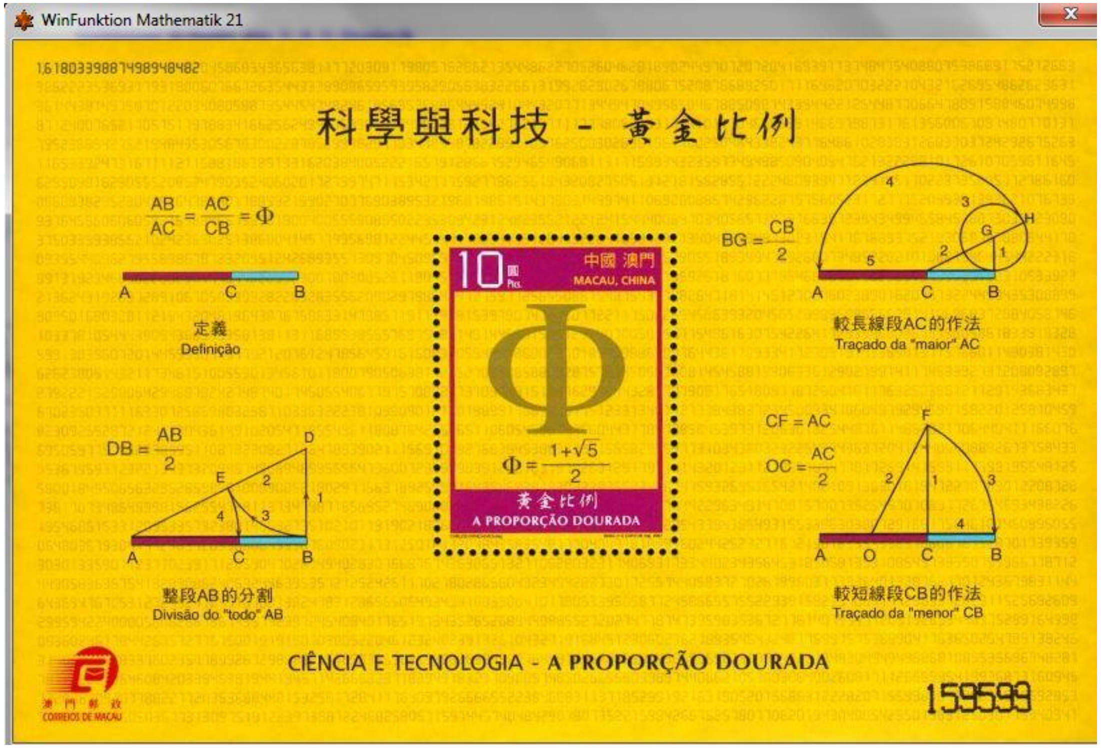
Freude an der mathematischen Spielerei: Ja!

Aber Betrachtung der Welt durch die Sectio-Aurea-Brille: Nein!

http://www.dr-bernhard-peter.de/Goldsch/seite583.htm

Der Goldene Schnitt in anderen Kulturen

- Asien: Macau, China, 2007



Der Goldene Schnitt – Schlussworte aus der Facharbeit von Markus Faustmann 2005

Das schon in der Antike bekannte Verhältnis des Goldenen Schnittes hat seit Jahrtausenden in der Mathematik und in der Kunst eine bedeutende Rolle eingenommen und kann wohl als eine der einflussreichsten Größen der Kulturgeschichte angesehen werden. Für Platon war es der Zugang zum Universum, Leonardo da Vinci versuchte in seinen Studien, in den Proportionen des menschlichen Körpers den Goldenen Schnitt wieder zu entdecken, und für Johannes Kepler stellte dieses Verhältnis schlicht das Glanzstück der Geometrie dar.

Der Mythos und die Anziehungskraft einer ästhetisch vollendeten Proportion haben sich bis in unsere Zeit erhalten. Auch heute noch empfinden wir Formen, denen der Goldene Schnitt zugrunde liegt, instinktiv als ausgewogen. In der „nüchternen" Mathematik gilt das einst als „göttlich" gepriesene Verhältnis häufig als „das erste und somit einfachste nichttriviale Beispiel im Rahmen weiterführender Verallgemeinerungen".[93]

In den modernen Naturwissenschaften und in vielen neuen Forschungsbereichen taucht der Goldene Schnitt überraschenderweise wieder auf, auf dem Gebiet der Metaphysik und Chaosforschung wird diese Proportion oftmals sogar als letztes, natürliches Ordnungsprinzip betrachtet. Gerade dies führt zu der Annahme, dass diese Proportion auch zukünftig in der Wissenschaft und im täglichen Leben eine bedeutende Rolle einnehmen wird – der Goldene Schnitt hat sicher eine „goldene" Zukunft!

Der Goldene Schnitt

Was nehmen Sie mit nach Hause ?

- Ist ein (Strecken)Verhältnis (von Major zu Minor) mit $\boldsymbol{\Phi = 1{,}618}$ bzw. umgekehrt mit $\boldsymbol{\varphi = 0{,}618}$
- Hat sehr lange Geschichte – Pythagoras, Euklid
- Hängt mit dem Quotienten benachbarter **Fibonacci**-Zahlen zusammen
- Taucht in Natur und Kultur (auch bewusst) auf:
  - Pflanzen, Tiere; z. B. Tannenzapfen, Blüten, Seestern
  - Architektur, Musik, Kunst, Fotographie
- Drückt Harmonie/Wohlempfinden aus

Literatur und Links zum Goldenen Schnitt

Autor, Nachname - Vorname	Titel	Auflage	Verlag	Ort	Jahr
Beutelspacher, A.; Petri, B.	Der Goldene Schnitt		Wissenschaftsverlag	Mannheim	1988
Bühler, Walther	Das Pentagramm und der Goldene Schnitt als Schöpfungsprinzip	2	Freies Geistesleben	Stuttgart	2001
Faustmann, Markus	Der Goldene Schnitt	1	Fachbereichsarbeit Mathematik	Wiener Neustadt	2005
Hagenmaier, Otto	Der Goldene Schnitt: ein Harmoniegesetz und seine Anwendung		Augustus Verlag	Augsburg	1990
Hemenway, Priya	Der Geheime Code - die rätselhafte Formel, die Kunst, Natur und Wissenschaft bestimmt		Evergreen	Köln	2008
Pfeiffer, Franz Xaver	Der Goldene Schnit und dessen Erscheinungsformen in Mathematik, Natur und Kunst	Nachdruck von 1885	Dr. Martin Sändig	Wiesbaden	1969
Reis, Helmut	Der Goldene Schnitt und seine Beudeutung in der Harmonik		Verlag für systematische Musikwissenschaft	Bonn	1990
Schmidt, Thomas Michael	Musik und Kosmos als Schöpfungswunder		Verlag Thomas Schmidt	Frankfurt	1974
Walser, Hans	Der Goldene Schnitt		B.G. Teubner; VDF	Stuttgart, Zürich	1993
Worobjow, N.N.	Die Fibonaccischen Zahlen	2. erweitert	VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften	Berlin	1971

http://www.barnim-gym.de/media/archive1/sectioaurea/der_goldene_schnitt_in_der_mathemati.pdf

http://www.dr-bernhard-peter.de/Goldsch/seite583.htm

http://www.was-darwin-nicht-wusste.de/wunder/mathematische-ueberraschungen.html

http://www.golden-section.eu/kapitel5.html

http://www.kleine-fotoschule.de/bildgestaltung/goldener-schnitt.html

http://www.uni-hildesheim.de/~stegmann/goldschn.pdf

Ergänzungen von P. Döbbeler nach dem Vortrag (1)

- Sehr geehrter Herr Dr. Kühn, ich hänge einige Blütendiagramme (Stützel, Botanische Bestimmungsübungen 2006) an, die zeigen, dass Fünfecke im Blütenbereich häufig vorkommen und für viele Familien mit 10.000en Arten typisch sind.
  [Dann ein zweiter Anhang aus dem "Strasburger", Lehrbuch der Botanik, 35. Aufl. 2002 – ***ist nicht einbezogen; KK***. Es geht um die Stellung von Blättern und damit auch um die von Blütenorganen (Blüten bzw. Früchte der Sonnenblume z. B.), die ja umgewandelte Blätter sind.]
- Dabei spielt auch die Fibonacci-Reihe eine Rolle.
- Peter Döbbeler (Teilnehmer am 23.3.2015)

Ergänzungen nach dem Vortrag (P. Döbbeler; 2)

(aus Thomas Stützel 2006)

Aceraceae (Ahorngewächse)

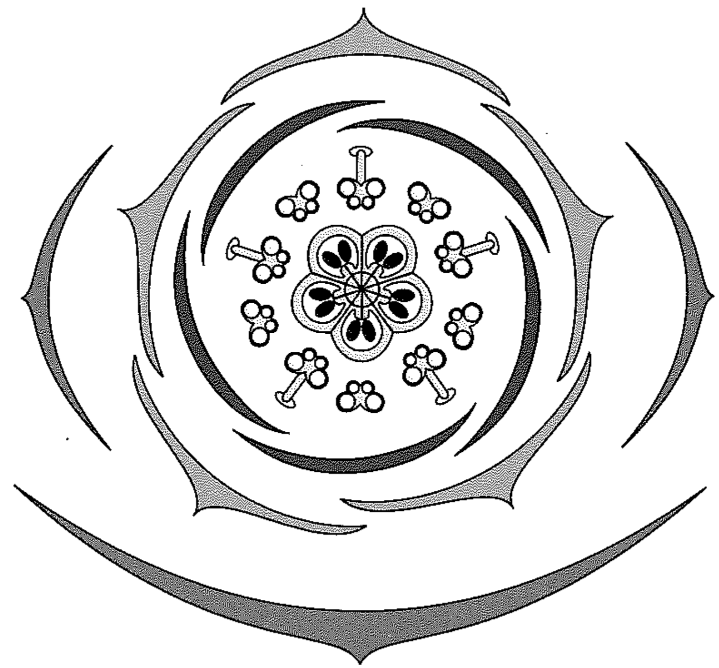
2 Gattungen, 113 Arten, davon einheimisch die Gattung *Acer* mit 6 Arten.

Die drei wichtigsten einheimischen Arten sind *A. pseudoplatanus* L. (Berg-Ahorn) und *A. platanoides* L. (Spitz-Ahorn) mit hängenden und der kleinblättrige *A. campestre* L. (Feld-Ahorn) mit aufrechten Blütenständen. Der Feld-Ahorn kann durch Schnitt oder Verbiss leicht in einer strauchigen Form gehalten werden und ist deswegen auch als Heckenpflanze verbreitet.

Nutzpflanzen: *Acer pseudoplatanus* L. (Berg-Ahorn), wichtiges Forstgehölz.

Beschreibung: Monopodial wachsende Holzgewächse. Blätter gegenständig, meist handförmig gelappt, seltener gefiedert, ohne Stipeln.

Blüten zwittrig oder eingeschlechtig, insekten- oder windbestäubt (mit Übergängen), radiär, 4- bis 5-zählig. Staubblätter auch bei sonst 5-zähligen Blüten meist 8, da 2 Staubgefäße



Geraniaceae (*Geranium*)

✳ K5 C5 A5+5 G($\underline{5}$)

Abb. 25: Blütendiagramm der Geraniaceae.

Ergänzungen von Rudolf Haller nach dem Vortrag (1)

- Lieber Herr Kühn, gerne komme ich Ihrem Wunsche nach. Sie finden alles Gewünschte in der Anlage. Es freut mich, wenn Sie die Daten verwenden können.
- Heute hätte man keinen Platz mehr dafür in einem Schulbuch, da man ja nur Kompetenzen erlernen soll.
- Alles Gute bis zum nächsten Mal!
- Gruß
- Rudolf Haller (Teilnehmer am 23.3.2015)

Ergänzungen nach dem Vortrag (R. Haller; 2) Aufgaben und Namensgebung

Algebra
9

Friedrich Barth ' Reinhold Rderle
Rudolf Haller

"C) paori.e0, rot0 pāv tiv Iriļpov ōōol elorv lōrofiral ral Paori,rol, ǎv Ōš rfr yeropetplg nōolv āotv ōōōq plo.

Durch Dein Land, o König, f00uen freilich gewöhnliche Wege und Königsstraßen, In der Mathematik aber gibt es für alle nur einen weg'

MsNHcHMos
zu AT.gXANDERENGnosseN

Oldenbourg

26. a) EUKLID (um 300 v. Chr.) behandelt in Buch II, Satz 11 seiner *Elemente* folgendes Problem: Eine gegebene Strecke so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt gleich ist dem Quadrat über dem anderen Abschnitt.

1) Berechne die Länge x desjenigen Teils der Strecke a, über dem das Quadrat errichtet wird.*

2) Zeige, dass stets $x > \frac{1}{2}a$ ist.

b) Zeige durch Berechnen von $\overline{AD} = x$, dass die von EUKLID angegebene Konstruktion richtig ist (Abbildung 98.1).

c) Die stetige Teilung oder der goldene Schnitt. EUKLID nennt in Buch VI (Definition 3) seiner *Elemente* eine Strecke stetig geteilt, wenn sich die ganze Strecke zum größeren Abschnitt genauso verhält wie der größere Abschnitt zum kleineren. Zeige, dass die Aufgabe, eine Strecke a stetig zu teilen, auf dieselbe

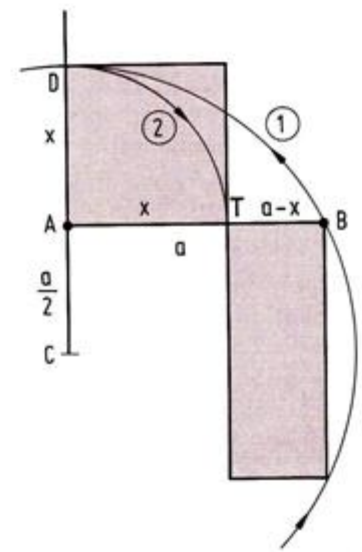


Abb. 98.1 T teilt [AB] so, daß $x^2 = a(a-x)$.
$k(C; \overline{CB})$ liefert D, $k(A; \overline{AD})$ liefert T.

Gleichung führt wie die, mit der das Problem von EUKLIDS Satz II/11 aus Aufgabe **a** gelöst wird.*

d) Die stetige Teilung hat folgende interessante Eigenschaft: Trägt man den kleineren Abschnitt auf dem größeren Abschnitt ab, so wird dieser wieder nach dem goldenen Schnitt geteilt, wobei der frühere kleinere Abschnitt die Rolle des größeren Abschnitts übernimmt. Man kann so immer weiter fortfahren. Beweise die Behauptung.

Ergänzungen nach dem Vortrag (R. Haller; 3)

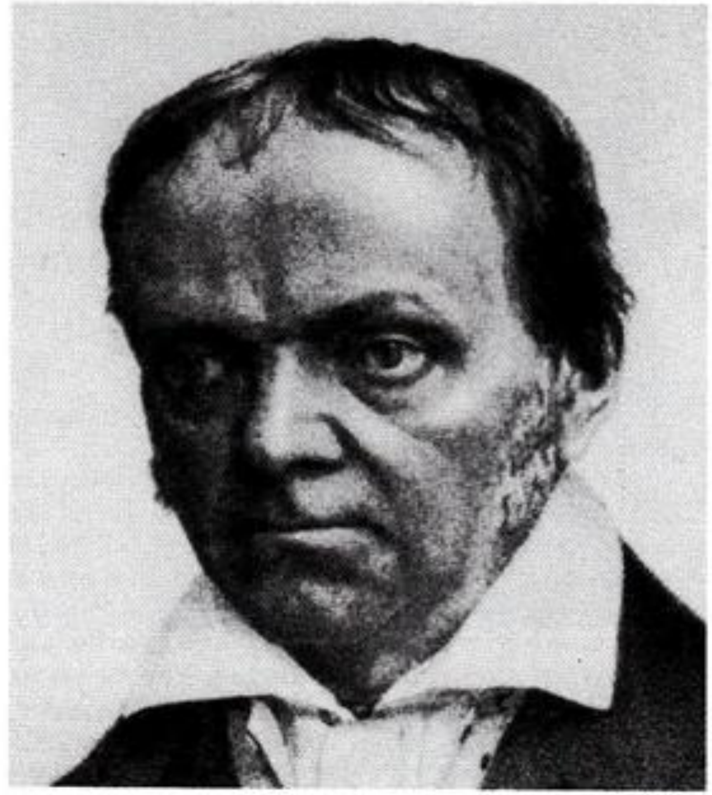
* Wenn für 3 Größen a, b, c bzw. für 4 Größen a, b, c, d usw. zutrifft, dass $a : b = b : c$ bzw. $a : b = b : c = c : d$ usw. gilt, dann sagten ARISTOTELES (384–322 v. Chr.) und auch EUKLID z. B. in Buch VIII seiner *Elemente*, es bestehe eine *συνεχὴς ἀναλογία* (synechés analogía), eine *zusammenhängende*, *fortlaufende*, *beständige Verhältnisgleichung*. Wörtlich übersetzte dies ins Lateinische BOETHIUS (um 480–524/5) mit *proportionalitas continua*, ins Deutsche der Bamberger Rechenmeister Wolffgang SCHMID 1539 in seinem *Das erst buch der Geometria* mit *ein stäte unzertrente auffeinander volgende proportz*. Der Augsburger Wilhelm HOLTZMANN (1532–1576), der seinen Namen zu XYLANDER gräzisierte, sprach 1562 in seiner Euklidübersetzung (Buch V, Definition 10) von einer *stetigen Proportion*.

Offensichtlich stehen nach EUKLIDS Definition 3 von Buch VI die ganze Strecke, der größere und der kleinere Abschnitt in stetiger Proportion zueinander. Es nimmt daher wunder, dass EUKLID für diese Teilung einer Strecke nicht den oben angegebenen Fachausdruck benützte; stattdessen sagt er, eine Strecke *ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν* (ákron kai méson lógon temeīn), was unter Umstellung der Adjektiva mit *media et extrema ratione secare* im Mittelalter latinisiert und mit *nach dem äußeren und mittleren Verhältnis schneiden* in die deutschen Lehrbücher des 18. Jh.s einging. Immerhin nennt XYLANDER die Strecke schon recht kurz *Proportzlich zertailt*. Erst Johann Friedrich LORENZ übersetzt 1781 EUKLIDS Wendung mit *nach stetiger Proportion geschnitten*. Wann daraus die Kurzform *stetig geteilt* wurde, konnten wir nicht ermitteln.

Man darf annehmen, dass bereits die PYTHAGOREER Kenntnis von dieser Teilung hatten, die ein unentbehrliches Hilfsmittel zur Konstruktion der regulären Körper war. Luca PACIOLI (um 1445–1517) beschäftigte sich mit diesen Körpern und gab wegen der Wichtigkeit dieser Teilung seiner 1498 verfassten und 1509 gedruckten diesbezüglichen Schrift,

Ergänzungen nach dem Vortrag (R. Haller; 4)

ten und 1509 gedruckten diesbezüglichen Schrift, für die sein Freund LEONARDO DA VINCI (1452 bis 1519) die Zeichnungen anfertigte, den Titel *Divina Proportione* – »Göttliches Verhältnis«. Dieser Titel mag zur späteren Mystifizierung beigetragen haben. PACIOLI selbst gibt fünf Gründe an, warum er dieses Verhältnis göttlich nennt. Einer davon ist, dass es sich genauso wenig durch rationale Größen ausdrücken läßt wie Gott durch Wörter. Ein anderer nimmt Bezug auf PLATON (438–348 v. Chr.), der in *Timaios* (55c) das Dodekaeder, das sich ja ohne dieses Verhältnis nicht konstruieren lässt, dem Äther, der quinta essentia, d.h. in christlicher Sicht der göttlichen Kraft zuordnet. Und wie PACIOLI sieht auch 1569 der französische Mathematiker, Humanist und Philosoph Petrus RAMUS (1515–1572) die bei dieser Teilung auftretenden 3 Teile als Sinnbild der Dreifaltigkeit, da sie eine »geeinte Dreiheit und eine dreiartige Einheit« bilden. Johannes KEPLER (1571–1630) spricht in einem Brief vom 12. 5. 1608 mit Hochachtung von dieser *proportio divina*. Er sieht darin eine Idee des Schöpfers, die er wegen der in Aufgabe **d** angesprochenen Eigenschaft selbst für ein Sinnbild des Ewigen hält. Die Teilung nennt er *sectio proportionalis*. Der Ausdruck *sectio divina*, d.h. göttlicher Schnitt, stammt nicht von ihm, wie oft behauptet wird. 1619 schreibt er jedoch in seiner *Harmonice mundi* – »Weltharmonik« –, dass »die heutigen [Mathematiker] sowohl den Schnitt wie auch die Proportion göttlich nennen wegen ihrer wunderbaren Natur und ihrer vielfältigen Besonderheiten«. KEPLER sagt uns aber nicht, wer diesen Ausdruck geprägt



um 1850

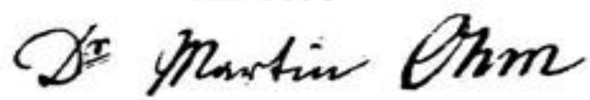


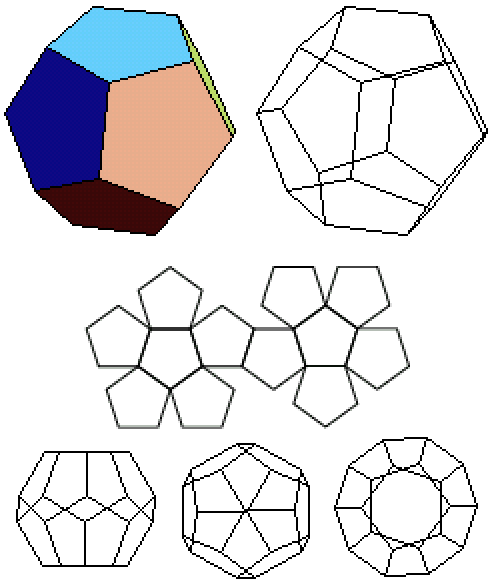
Abb. 99.1 Martin OHM
(6.5.1792 Erlangen – 1.4.1872 Berlin)

Ergänzungen nach dem Vortrag (R. Haller; 5)

hat. Ebenso offen bleibt diese Frage bei Christian VON WOLFF (1679–1754), der die Bildung *sectio divina* in seinen *Anfangsgründen Aller Mathematischen Wissenschaften* von 1710 (Band IV, Anmerkung 155) wie folgt erklärt: »Man pfleget es auch divinam sectionem zu nennen/weil (wie aus dem Euclide zu sehen) man viel aus dieser Section demonstriret hat.« Im 18. Jh. ist *sectio divina* dann zum stehenden Fachausdruck geworden. 1835 schreibt schließlich Martin OHM (1792–1872) in der 2. Auflage seiner *Die reine Elementar-Mathematik* recht vage: »Diese Zerteilung [...] nennt man wohl auch den goldenen Schnitt.« Wer ist »man«? Vielleicht vermischten sich bei OHM *sectio divina* mit *regula aurea*, wie die Regel vom Dreisatz früher genannt wurde. Aber schon 1839 findet sich in Johann Friedrich KROLLS *Grundriß der Mathematik für Gymnasien* die Latinisierung »sectio divina oder aurea«. Von da ab ist diese Wortschöpfung nicht mehr aufzuhalten.

Die Vorstellung, dass der goldene Schnitt ein in der ganzen Natur waltendes Ordnungsprinzip sei, demzufolge zwei in einem derartigen Verhältnis stehende Teile ein besonders wohlgefälliges Ganzes ergäben, setzte erst 1854 Adolf ZEISING (24.9.1810 Ballenstedt–27.4.1876 München), ein anhaltischer Gymnasialprofessor, in die Welt, und zwar in seinem Werk *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers, aus einem bisher unbekannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdringenden morphologischen Grundgesetze entwickelt*. Es gibt nämlich in der gesamten Antike bis herauf ins 19. Jh. keine einzige Quelle, die der stetigen Teilung irgendeine ästhetische Bedeutung zuerkennen würde.

Ergänzung von W. Wiesner nach dem Vortrag zum Fünfeckzwölfflächner Pentadodekaeder – ein platonischer Körper



„nicht rund genug für den Fußball“

Aus: ***WinFunktion 21 Mathematik***

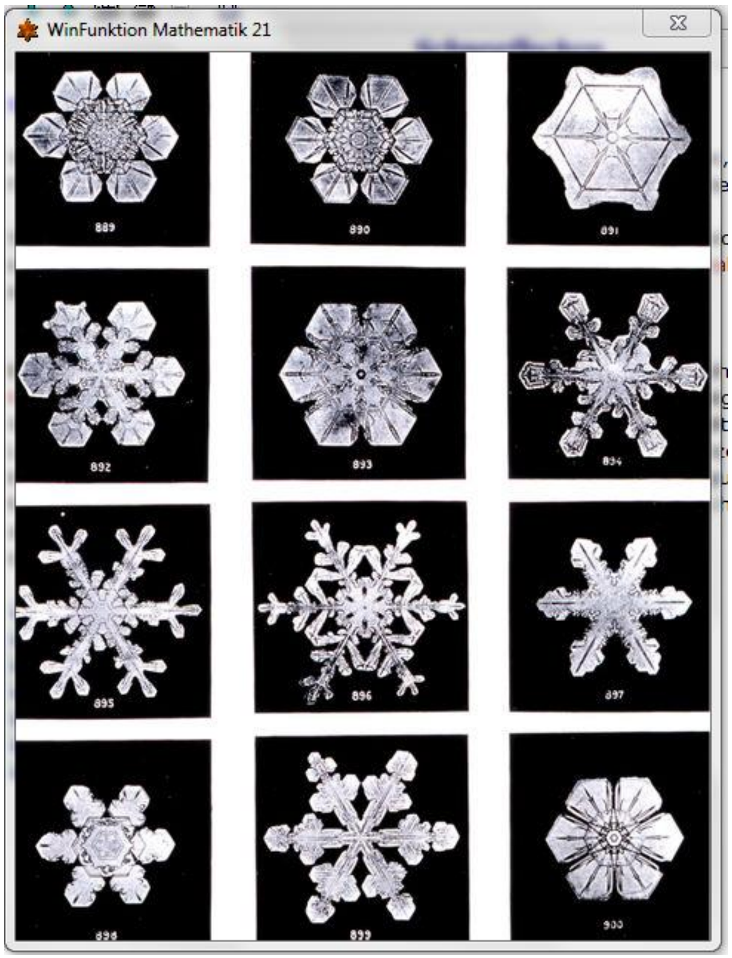
Regelmäßiges Dodekaeder, Pentagondodekaeder

Das Polyeder besteht aus 12 Fünfecken, 20 Eckpunkten und 30 Kanten und heißt auch Pentagondodekaeder bzw. Fünfeckzwölfflächner.
Aufbau: Sechs regelmäßige Fünfecke bilden eine Rosette. Klappt man die äußeren Fünfecke nach oben, so dass sie sich berühren, entsteht eine Schale. Zwei Schalen legt man verdreht aufeinander und erhält so das Dodekaeder. Zwei Fünfecke liegen parallel und bilden die Grund- und Deckfläche. Zwischen ihnen liegen zehn Fünfecke.
Zeichnet man alle zehn Diagonalen ein, die durch den Mittelpunkt des Dodekaeders verlaufen, so erkennt man: Das Dodekaeder wird von 12 fünfseitigen gleichen Pyramiden gebildet, die sich in der Mitte treffen.

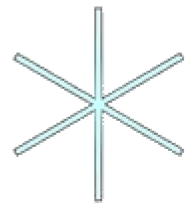
Ergänzungen nach dem Vortrag

- Pentagramm (Goldener Schnitt) und Anthroposophie
- http://anthrowiki.at/Pentagramm

Ergänzung nach dem Vortrag:
Schneeflocken



Zur Anzahl der Ecken: „um nicht auf den Winter warten zu müssen“.

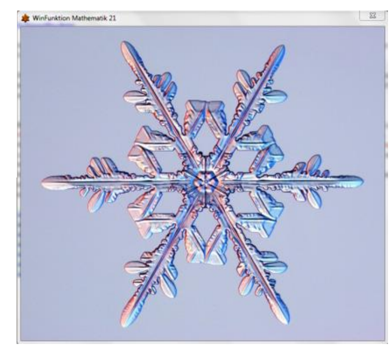


nadelförmiger Kristall

dendritischer Stern

dendritisches Plättchen

Aus: ***WinFunktion 21 Mathematik***



Nächste Veranstaltung

Rechnen wie damals

Das 1x1 durch die Jahrhunderte

Rudolf-Steiner-Schule, Gröbenzell

13. Juli 2015

Stephan Weiss