Quadratwurzelziehen mit Napiers Stäbchen und mit einer mechanischen Rechenmaschine nach dem Toeplerverfahren – ein Vergleich

erstellt von Peter Koppelstaetter, Sept. 2010

1. Napier

a) Im Dezimalsystem ist die Wurzel

aus einer 1-2 –stelligen Zahl 1-stellig ($1^2 = 1$, $9^2 = 81$)

aus einer 3-4 –stelligen Zahl 2-stellig ($10^2 = 100$, $99^2 = 9801$) usw.

Napier teilt aufbauend auf diese Gesetzmäßigkeit den Radikanden in Zweiergruppen ein.

b) Napier stützt sich im Übrigen auf die binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Beispiel Wurzel aus 54321 = 233,068

Zuerst wird der Radikand in Zweiergruppen eingeteilt: 5\`43\`21

Die Anzahl der Zweiergruppen gibt an, dass die Wurzel (vor dem Komma) 3-stellig ist. Durch die Einteilung in Zweiergruppen kann die Zahl auf die Quadratzahlen der Hunderter (zwischen 1´00´00 und 81´00´00), der Zehner (zwischen 1´00 und 81´00) und der Einer (zwischen 1 und 81) abgeklopft werden.

Der Stab „pro quadrata" zeigt in der linken Spalte alle Quadratzahlen einer 1-stelligen Zahl. Der Wert in der zweiten Zeile (04) kommt dem Wert der ersten Zweiergruppe (05) am nächsten, ohne ihn zu übersteigen. In der letzten Spalte des Stabes „pro quadrata" ist die Zahl angegeben, deren zweite Potenz in der ersten Spalte steht. Von der letzten Spalte kann deshalb unmittelbar die erste ermittelte Ziffer der Wurzel abgelesen werden: 2

Mit der Ermittlung der ersten Ziffer des Ergebnisses (= Anzahl der Hunderter) ist jetzt außerdem bekannt, dass das Ergebnis der Wurzelrechnung zwischen 200 und 300 liegt.

pro quadrata

0/1	2	1
0/4	4	2
0/9	6	3
1/6	8	4
2/5	10	5
3/6	12	6
4/9	14	7
6/4	16	8
8/1	18	9

Erstes Zwischenergebnis = 2

Das Subtraktionsergebnis 5-4 =1 wird um die nächste Zweiergruppe (43) erweitert = 143

Die weitere Rechnung ergibt sich aus der binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

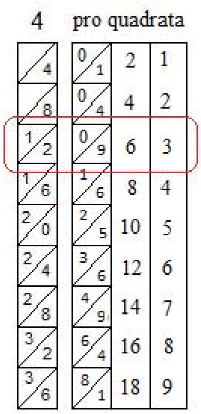
Die zu errechnende Ergebniszahl setzt sich aus einem bereits ermittelten vorderen Teil der Ergebniszahl (a) und einem angehängten Teil (b) zusammen: (10*a + b)

b wird im nächsten Schritt ermittelt

a = 10*2 = 20

$(20+b)^2 = 20^2 + 2*20*b + b^2 = 20^2 + \mathbf{4*10*b + b^2}$

Das bisherige aktuelle Zwischenergebnis a (2) wird verdoppelt und als Stäbchen (4) vor den Stab „pro quadrata“ gelegt und wird durch diese Position auch mit 10 multipliziert.



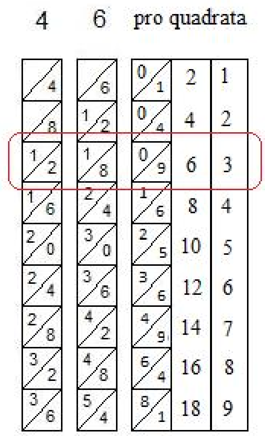
$4*10 * b + b^2$ kleiner/gleich 143

Der Vergleich der Werte auf den Stäbchen mit 143 ergibt 129 in der 3. Zeile

$23^2 = (20 + 3)^2 = 20^2 + 2*20*3 + 3^2 = 20^2 + \mathbf{(4*3*10 + 3^2)}$ In der Klammer ist enthalten, was auf den Stäbchen in der 3. Zeile abgelesen werden kann: 120 (4*3*10) und 9 (3^2), wobei ein Übertrag zu addieren wäre.

aktuelles Zwischenergebnis = 23

Das aktuelle Zwischenergebnis (a =23) ist zu verdoppeln und wird als Stäbchen (4 und 6) vor den Stab „pro quadrata“ gelegt.



143-129=14, ergänzt um die nächste Zweiergruppe (21) = 1421

$(230 + b)^2 = 230^2 + 2*230*b + b^2 = 230^2 +$ (**$46*10*b + b^2$**)

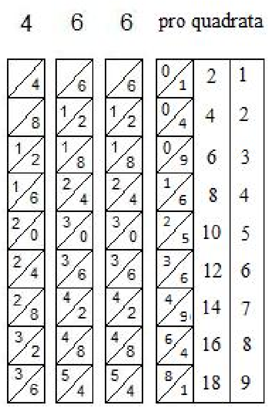
$46*10*b + b^2$ kleiner/gleich 1421

Von den Stäbchen kann in Zeile 3 (1 /2 1/8 0/9) 1389 abgelesen werden. Wenn für b = 3 eingesetzt wird, ergibt sich $46 * 10 * 3 + 3^2 = 1389$

Aktuelles Zwischenergebnis 233

1421-1389 = 32, ergänzt um 00 (=3200), weil vom Radikanden nichts mehr übrig ist und ein Rest vorhanden ist. Weil vom Radikanden nichts mehr übrig ist, ist ein Komma zu setzen. Für die Weiterrechnung werden damit Radikand und Wurzelergebnis um eine Zehnerpotenz vergrößert, aktuelles Zwischenergebnis 233,)

Das aktuelle Zwischenergebnis (233) ist zu verdoppeln und wird als Stäbchen (4 und 6 und 6) vor den Stab „pro quadrata“ gelegt.



$(2330 + b)^2 = 2330^2 + 2*2330*b + b^2 = 2330^2 +$ **$466*10*b + b^2$**

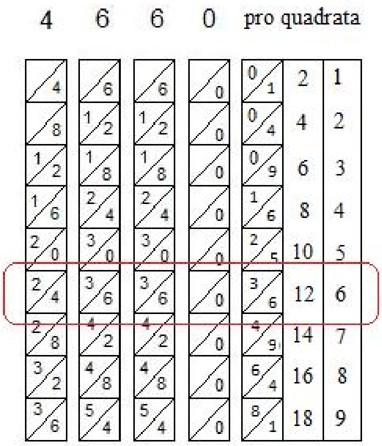
$466*10*b + b^2$ kleiner/gleich 3200

Es kann für b kein Wert eingesetzt werden, damit die Ungleichung aufgeht. Bereits die kleinste Zahl auf den Stäbchen (4661) bzw. beim Einsetzen einer 1 in die Ungleichung ($466 *10*1 + 1^2 = 4661$) ist die kleinste sich ergebende Zahl größer als

3200. Deshalb erfolgt eine zweite Erweiterung des Rests auf jetzt 320000. Das Ergebnis wird damit um eine Null erweitert (233,0)

Aktuelles Zwischenergebnis 233,0

Das aktuelle Zwischenergebnis (233,0) ist zu verdoppeln und wird als Stäbchen (4 und 6 und 6 und 0) vor den Stab „pro quadrata“ gelegt.



$(23300 + b)^2 = 23300^2 + 2*23300*b + b^2 = 23300^2 + \mathbf{4660*10*b + b^2}$

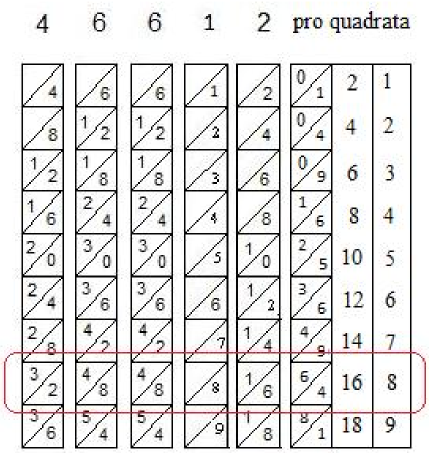
$4660*10*b + b^2$ kleiner/gleich 320000

Wenn für b = 6 gesetzt wird, ergibt sich 279600 + 36 = 279636 (6. Zeile)

320000-279636 = 40364

Aktuelles Zwischenergebnis 233,06

Das aktuelle Zwischenergebnis (233,06) ist zu verdoppeln und wird als Stäbchen (4 und 6 und 6 und 1 und 2) vor den Stab „pro quadrata“ gelegt.



$(233060 + b)^2 = 233060^2 + 2*233060*b + b^2 = 233060^2 + \mathbf{46612*10*b + b^2}$

$46612*10*b + b^2$ kleiner/gleich 4036400

Wenn für b = 8 eingesetzt wird (8. Zeile), ergibt sich

46612*10*8 + 8^2 = 3728960 + 64 = 3729024

4036400-3729024=307376

Aktuelles Zwischenergebnis = 233,068

An dieser Stelle wird die Berechnung abgebrochen, eine Weiterrechnung mit dem Rest 307376 wäre möglich.

2. Toepler

a) Im Dezimalsystem ist die Wurzel
aus einer 1-2 –stelligen Zahl 1-stellig ($1^2 = 1$, $9^2 = 81$)
aus einer 3-4 –stelligen Zahl 2-stellig ($10^2 = 100$, $99^2 = 9801$) usw.
Toepler teilt wie Napier aufbauend auf diese Gesetzmäßigkeit den Radikanden in Zweiergruppen ein.

b) Toepler stützt sich im Übrigen darauf, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich dem Quadrat von n ist. Es ist anzumerken, dass bereits der griechische Mathematiker Nikomachos aus Gerasa in Arabien diese Gesetzmäßigkeit nachgewiesen hat. Nikomachos hat um 100 n. Chr. gelebt.

Beim Umsetzen des Toeplerverfahrens auf einer Kurbelrechenmaschine ist folgendes Verhältnis von Bedeutung:
x = Anzahl der ungeraden Zahlen
y = zuletzt abgezogene ungerade Zahl
z = nächste abzuziehende ungerade Zahl

<table>
<tr><td>x * 2 – 1 = y</td><td colspan="2">Zusammenhang zwischen Anzahl der ungeraden Zahlen
und letzter abgezogener Zahl</td><td>umgeformt:
$x = \frac{y+1}{2}$</td></tr>
<tr><td></td><td>Anzahl
1 *2 = 2
2 *2 = 4
3 *2 = 6
4 *2 = 8
…
20 *2 = 40</td><td>ungerade Zahl
1
3
5
7
…
39</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Das Einbeziehen der nächsten Zweiergruppe bedeutet gleichzeitig die Anzahl mit 10 zu multiplizieren</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>5`43
-1
<u>-3</u> ($-4 = -2^2$)</td><td>543

<u>-400</u> (=-</td><td></td></tr>
</table>

	20^2) 143 143 die 20. ungerade Zahl ist 39	
$x * 2 * 10 + 1 \quad = z$	die 21. ungerade Zahl ist 41	$z = \frac{y+1}{2} * 2 * 10 + 1$ $= (y + 1) * 10 + 1$

Beispiel zur Berechnung der Quadratwurzel von 54321 mit einer Kurbelrechenmaschine unter Anwendung des Toepler-Verfahrens:
Geeignet sind nur Rechenmaschinen, bei denen man jederzeit während einer Rechnung im Eingabewerk jede Stelle verändern kann.
U = Umdrehungen
E = Eingabewerk
R = Resultatwerk

Wurzel von 54321 = 233,068

1. Schritt: Die Zahl 54321 ist so einzukurbeln, dass im Ergebniswerk rechts und links noch ausreichend freie Stellen bleiben. Das Umdrehungszählwerk ist dann auf Null zu stellen.
Gedanklich wird der Radikand in Zweiergruppen von rechts nach links eingeteilt = 05 ´43´21

U	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0
R	0	0	5	4	3	2	1	0

2. Schritt: Von der ersten Zweiergruppe von links (hier 05) zuerst 1, dann 3 subtrahieren.

U	0	0	2	0	0	0	0	0
E	0	0	3	0	0	0	0	0
R	0	0	1	4	3	2	1	0

3. Schritt: Als nächste ungerade Zahl wäre 5 abzuziehen, was zu einer negativen Zahl führen würde (1-5=-4). Deshalb wird stattdessen der Schlitten um eine Stelle nach links geschoben.

U	0	0	2	0	0	0	0	0
E	0	0	3	0	0	0	0	0
R	0	1	4	3	2	1	0	0

4. Schritt: Aus der 2 im Umdrehungszählwerk wurde damit gedanklich eine 20. D. h. als vorläufiges Ergebnis wurde 20 gebildet. Die 20. ungerade Zahl ist (2 * 20) – 1 = 39 (denn es gibt genauso viele gerade wie ungerade Zahlen). Die nächste ungerade Zahl ist entsprechend 2 * 20 + 1. Anders ausgedrückt, das Zwischenergebnis 2 wird mit 10 multipliziert, verdoppelt und um 1 erhöht (2*10*2+1 = 41).

Durch die Verschiebung des Schlittens wurde die Rechenmaschine in den Zustand versetzt, der auch durch nacheinander folgende Subtraktionen der ungeraden Zahlen 1,3,5…39 erreicht wird. Die weiteren Subtraktionen erfolgen nach der Verschiebung des Wagens von 143, dem um die zweite Zweiergruppe ergänzten „Rest" der ersten Zweiergruppe. Die nächste ungerade Zahl ist 41, die im Eingabewerk einzustellen ist.

Eine zuletzt abgezogene Zahl (hier 3) ist immer um 1 kleiner als die verdoppelte Anzahl der abgezogenen Zahlen (hier 2*2=4). Die nach der Verschiebung des Wagens (was einer Multiplikation mit 10 entspricht) maßgebliche nächste abzuziehende Zahl lässt sich deshalb auch dadurch errechnen, dass zur zuletzt abgezogenen Zahl 1 addiert (3+1=4) und dann eine 1 angehängt wird (41); zur näheren Erläuterung siehe auch obige Tabelle.

U	0	0	2	0	0	0	0	0
E	0	0	4	1	0	0	0	0
R	0	1	4	3	2	1	0	0

5. Schritt: Jetzt sind der Reihe nach 41,43... zu subtrahieren. Nach der Subtraktion von 45 würde ein weiteres Abziehen (von 47) zu einer negativen Zahl führen.

U	0	0	2	3	0	0	0	0
E	0	0	4	5	0	0	0	0
R	0	0	1	4	2	1	0	0

6. Schritt: Deshalb wird der Schlitten wieder um eine Position nach links geschoben, was zu einer Wiederholung der Schritte 4 ff führt.

U	0	0	2	3	0	0	0	0
E	0	0	4	5	0	0	0	0
R	0	1	4	2	1	0	0	0

7. Schritt: Aus der 23 im Umdrehungszählwerk wurde damit 230. Von ursprünglich 54321 wurden somit 230*230 (=52900) abgezogen. Die letzte abgezogene ungerade Zahl war entsprechend (2*230) -1 = 459. Die nächste abzuziehende ungerade Zahl ist 461. Deshalb wird die jetzige Zahl im Eingabewerk (45) um 1 erhöht und rechts um 1 ergänzt.

U	0	0	2	3	0	0	0	0
E	0	0	4	6	1	0	0	0
R	0	1	4	2	1	0	0	0

8. Schritt: Im Folgenden werden die Zahlen 461, 463 und 465 abgezogen. Dann steht im Resultatwerk 32. Das Umdrehungszählwerk zeigt 233 an. Da im Resultatwerk noch ein Wert steht, kann man die Wurzel noch genauer errechnen, allerdings ist nach eingangs erwähnter Regel eine Kommastelle nach 233 zu setzen.

U	0	0	2	3	3	0	0	0
E	0	0	4	6	5	0	0	0
R	0	0	0	3	2	0	0	0

9. Schritt: Der Schlitten wird um eine Stelle nach links geschoben. Aus der 233 im Umdrehungszählwerk wird damit 233,0. Von ursprünglich 54321,0 wurden damit 233,0 *233,0 (= 54289,0) abgezogen. Die letzte abgezogene Zahl war (2*233,0)-0,1 = 465,9.

U	0	0	2	3	3	0	0	0
E	0	0	4	6	5	0	0	0
R	0	0	3	2	0	0	0	0

10. Schritt: Die nächste abzuziehende Zahl wäre 466,1 , was aber nicht möglich ist, ohne einen negativen Wert zu erhalten (320,0-466,1= -146,1). Deshalb wird der Wagen um eine weitere Stelle nach links geschoben.

U	0	0	2	3	3	0	0	0
E	0	0	4	6	5	0	0	0
R	0	3	2	0	0	0	0	0

11. Schritt: Durch das nochmalige Verschieben des Wagens wurde aus 233,0 jetzt 233,00 (die erste Stelle nach dem Komma ist eine Null). Von ursprünglich 54321,00 wurden bisher 233,00*233,00 (=54289,00) abgezogen. Die letzte abgezogene ungerade Zahl war (233,00*2) – 0,01 = 465,99. Die nächste abzuziehende Zahl ist 466,01. Sie ist im Eingabewerk einzustellen.

U	0	0	2	3	3	0	0	0
E	0	0	4	6	6	0	1	0
R	0	3	2	0	0	0	0	0

12. Schritt: Von 3200,00 werden jetzt nacheinander 466,01, 466,03, 466,05, 466,07, 466,09 und 466,11 abgezogen.

U	0	0	2	3	3	0	6	0
E	0	0	4	6	6	1	1	0
R	0	0	4	0	3	6	4	0

13. Schritt: Bei jetzt noch gegebenem Wert im Resultatwerk von 40364 kann 46611 nicht mehr abgezogen werden. Der Wagen wird deshalb um eine Stelle nach links geschoben, die letzte Stelle des Eingabewerks wird um 1 erhöht und rechts um 1 ergänzt.

U	0	0	2	3	3	0	6	0
E	0	0	4	6	6	1	2	1
R	0	4	0	3	6	4	0	0

Des Weiteren sind der Reihe nach 466121, 466123, 466125… zu subtrahieren. Nach der Subtraktion von 466135 ergibt sich folgendes Ergebnis:

U	0	0	2	3	3	0	6	8
E	0	0	4	6	6	1	3	5
R	0	0	3	0	7	3	7	6

Das Ergebnis (aus Umdrehungszählwerk bei Berücksichtigung der Kommastelle = 233,068) könnte durch Wiederholen der Schritte 11 ff (abhängig von der verfügbaren Stellenzahl der Rechenmaschine) noch verfeinert werden.