

# Die Viertelquadratmethode und das Pedimeter des Joseph Friedrich Schiereck

Barbara Haerberlin, Hamburg  
Stefan Drechsler, Hamburg

## Einleitung

Da Addition und Subtraktion sowohl für das menschliche Gehirn, als auch mechanisch einfacher zu realisieren sind als Multiplikation und Division, sind Methoden und Verfahren, die die Multiplikation zweier Zahlen auf eine Anzahl von Additionen und Subtraktionen zurückführen, in vielerlei analogmechanischen Geräten umgesetzt.

Eine dieser Methoden ist die Viertelquadratmethode, die auf der bekannten Identität

$$ab = \frac{1}{4}(a + b)^2 - \frac{1}{4}(a - b)^2$$

beruht.

Sie findet vermehrt auf sehr unterschiedliche Weise in Rechentechniken und Instrumenten ihre Anwendung, als im 19. Jahrhundert durch die neu entstandenen Kataster ein entsprechender Rechenbedarf entsteht [DrHa2009].

Eine der aufwendigsten Umsetzungen ist das Pedimeter des Gießener Mathematikers Joseph Friedrich Schiereck, das hier zusammen mit einigen weiteren Instrumenten, die sich dieselbe Formel zunutze machen, dargestellt werden soll.

## 1 Der Erfinder Joseph Friedrich Schiereck

Joseph Friedrich Schiereck stammt nach eigenen Angaben [Gieß1842] aus Posen, das damals zu Preußen gehörte. Sein Geburtsjahr ist wohl gegen 1790 anzusetzen, wie die Tatsache nahelegt, dass er in Göttingen Mathematik studierte, ohne jedoch dort immatrikuliert gewesen zu sein, bevor er ab 1813 für die Großherzoglich-Hessische Steuerrectification tätig wurde [Folk2006, S.10].

Als Beruf gibt er Mathematiklehrer an [Schi1841].

Seine 1820 in Gießen erschienene Polygonometrie [Schi1820] ist wohl mit ein Grund dafür, dass er im selben Jahr eine Stelle bei der Katastervermessung der Rheinprovinz antreten kann. Dort hält er erst im Winter 1820/21 in Kleve und dann im Winter 1821/22 in Düsseldorf Mathematikurse für die Geometer ab [Schi1841].

Ab Dezember 1823 ist er als Katastergeometer beschäftigt [Schi1841], [Folk2006, S.10] [AbCo1824].

In die Zeit um 1821 fallen seine ersten Gedanken zur Konstruktion eines Hilfsmittels für die Berechnung von Dreiecksflächen. Die Anwendung der Viertelquadratmethode dazu gibt er jedoch erst für März 1824 an [Schi1841]. Diese frühe Form des von ihm so genannten Pedimeters findet allerdings beim Kataster keine Anerkennung.

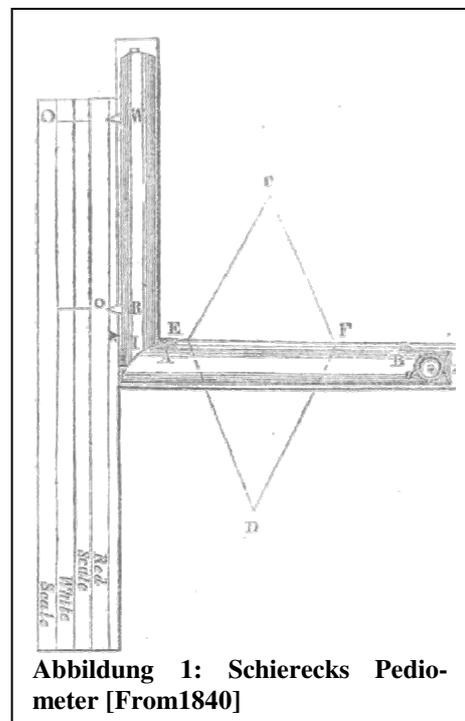


Abbildung 1: Schierecks Pedimeter [From1840]

1826 verlässt Schiereck die Katasterbehörde. Anlass ist wohl eine von ihm entwickelte Methode zur Ausgleichrechnung, die er, gegen die Katasterregularien verstoßend, weisungswidrig verwendet hatte [Folk2006].

Sein 1827 erschienenes Handbuch für Geometer enthält neben einer Rechtfertigung seiner umstrittenen Rechenmethode auch eine Tafel der Quadratzahlen [Schi1827a]. Er arbeitet nun als Mathematiklehrer, Buchautor und Übersetzer [Schi1828], [Walk1833].

Die Quadratetafel aus seinem Handbuch für Geometer wird auch einzeln veröffentlicht, um sie auch für andere Anwendungsgebiete, insbesondere in der Forstwirtschaft, nutzbar zu machen [Schi1827b].

Zudem versucht sich Schiereck als Erfinder [Folk2007]. 1829 entwickelt er eine Rechenmaschine, in der eine Viertelquadrattafel drehbar angebracht ist, die zur Multiplikation herangezogen wird [Weis2006]. Diese Maschine ist für ihn Anlass, einen Briefwechsel zu Carl Friedrich Gauß zu beginnen, der allerdings recht einseitig bleibt [Folk2006].

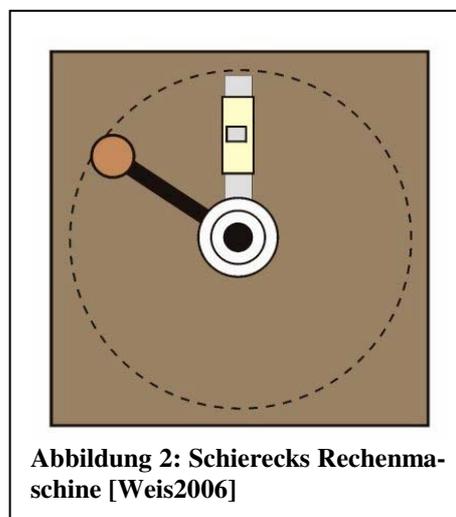


Abbildung 2: Schierecks Rechenmaschine [Weis2006]

Eine weitere Erfindung veranlasst Schiereck dann, 1836 nach England zu reisen. Vielleicht, weil er dort bessere Vermarktungschancen für einen von ihm entwickelten Antrieb sieht, der es ermöglichen soll, ein Schiff mit Windkraft anzutreiben und dabei auch direkt gegen den Wind steuern zu können. Mit dem Buchhändler David Nunes Carvalho schließt er am 24.10.1836 einen Vertrag über die Finanzierung und die Verwertung dieses Schiffsantriebes ab [Gieß1842]. Auf Carvalhos Namen läuft auch ein diesbezügliches Patent vom 3.12.1836 [Carv1837a], [Carv1837b]. Es ist offen, ob dieses Patent je Ertrag abwarf.

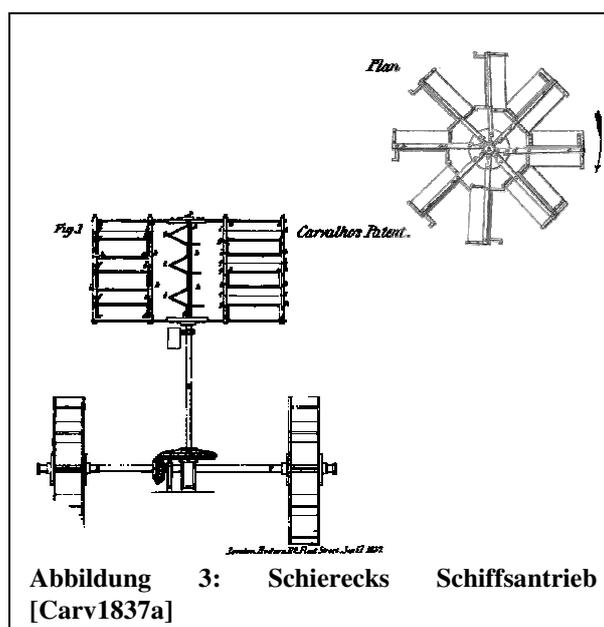


Abbildung 3: Schierecks Schiffsantrieb [Carv1837a]

Mehr Glück mit der Verwertung seiner Erfindung hat Schiereck offensichtlich mit seinem Pedimeter, das in England nochmals verbessert, bei Troughton & Simms gebaut und dann tatsächlich auch beim Tithe Survey eingesetzt wird [From1840], [Schi1841]. Sogar eine Gratifikationszahlung in Höhe von einhundert britischen Pfund wird ihm gewährt.

Im September 1840 kehrt Schiereck England den Rücken und betreibt von Gießen aus die Patentierung einer weiteren Erfindung, einer "...Vorrichtung für das Fortbewegen von Lasten, oder zum Hervorbringen großer Geschwindigkeit mittels animalischer Kräfte..." [Gieß1842].

Hierbei handelt es sich um ein Fahrzeug, auf dem ein Tier, etwa ein Pferd, durch seine natürliche Gangart ein Laufband in Gang setzt, das über ein Getriebe die Räder eines Wagens

antreibt und somit das ganze Gefährt in Bewegung versetzt. Durch einen Schaltmechanismus kann dabei sogar die Fahrtrichtung umgekehrt werden.

Das Königreich Hannover lehnt ein Patent darauf zweimal ab. Vom 30.7.1842 datiert ein königlich Bairisches Patent und vom 2.11.1841 bereits ein kaiserlich Österreichisches, das jedoch dem Erfinder die Auflage macht, binnen Jahresfrist die Realisierbarkeit seiner Erfindung nachzuweisen [Gieß1842].

Trotz umfangreicher Versuche ist ihm das jedoch offensichtlich nicht gelungen. In den ersten Novembertagen 1842, als diese Frist ausläuft, erscheint in der Großherzoglich-Hessischen Zeitung sein Nachruf: „... Nachdem er einige Monate mit vergeblichen Arbeiten und Versuchen gekämpft hatte, indem bei den Versuchen das Eisenwerk, erst Ketten, dann Haken, zuletzt Scharniere zerbrachen und die erwartete Schnelligkeit nur auf ganz kurze Distanzen im Anfang sich gezeigt haben soll, erfolgte die traurige Katastrophe.“ Die Redaktion merkt in einer Fußnote an: „Wie öffentliche Blätter meldeten, schied er, nach Verunglückung seines letzten Versuchs, in der Gegend von Mainz, freiwillig aus dem Leben.“ [Zitiert nach Folk2006, S. 19].

An den Erfinder Joseph Friedrich Schiereck, der in der Mitte des 19. Jahrhunderts die Dampfkraft durch Pferdekraft ersetzen wollte, sei hier noch einmal mit den Worten von Professor Bernhard Friedrich Thibaut erinnert, der ihn als Studenten in Göttingen kennengelernt hatte: „Ich erinnere mich seiner sehr gut; er ist nicht ohne Talente, eitel und anmaßend, nach Juden Art. Sein ganzes Vermögen, was er ohne alle Aussicht auf Nachschuß oder sonstige Unterstützung auf die Universität mit brachte, bestand in einem halben Thaler, und er meinte damals, das sey viel. Er hat übrigens der Unterstützung, die er erhielt, durch Fleiß und gutes Betragen Ehre gemacht.“ [Zitiert nach Folk2006, S. 10].

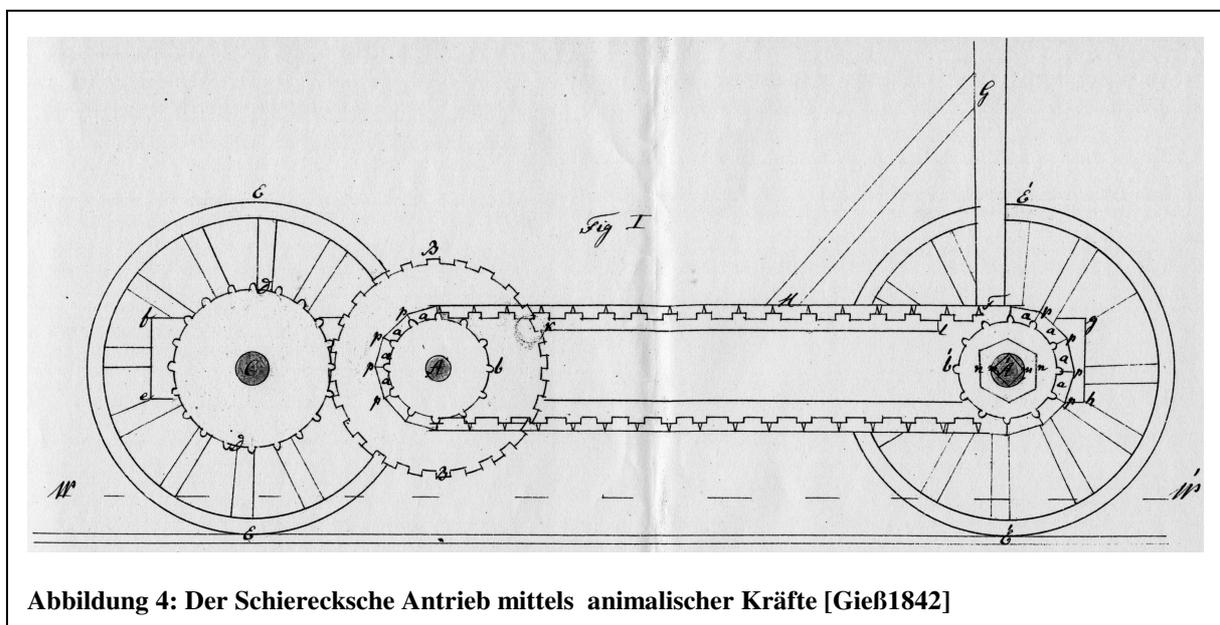


Abbildung 4: Der Schierecksche Antrieb mittels animalischer Kräfte [Gieß1842]

## 2 Die Viertelquadratmethode und einige ihrer Anwendungen

Die Viertelquadratmethode beruht auf der Ersetzung einer Multiplikation durch eine Addition und zwei Subtraktionen mittels der Identität

$$ab = \frac{1}{4}(a + b)^2 - \frac{1}{4}(a - b)^2.$$

Im Katasterumfeld, wo in der Regel die Dreiecksfläche aus den Längen von Grundlinie und Höhe berechnet wurde, findet sie sich in der folgenden Form:

$$F = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{8}(g+h)^2 - \frac{1}{8}(g-h)^2$$

## 2.1 Tafelwerke

Im 19. Jahrhundert kamen als Alternativen zu Logarithmentafeln und den für die prosthäretische Methode verwendeten trigonometrischen Tafeln auch solche mit Viertelquadraten auf [Mehm1902, S. 944ff].

Um mittels dieser Tafeln zu zwei gegebenen Zahlen das Produkt zu berechnen, bestimmt man deren Summe und Differenz im Kopf oder mit dem Bleistift, schlägt für die beiden so ermittelten Zahlen die Viertelquadrate im Tafelwerk nach und subtrahiert dann die beiden dort gefundenen Werte voneinander.

Gegenüber der Arbeit mit Logarithmentafeln wird als Vorteil hervorgehoben, dass man nur zweimal pro Produkt die Tafel zu Rate ziehen muss, und dass das Ergebnis auch frei von Rundungsfehlern ist [Laun1856]. Diese Tafeln fanden nicht nur im finanzmathematischen Bereich Verwendung, der Anhang des Tafelwerks von Laundry führt auch etliche Anwendungsbeispiele aus dem Gebiet der Parzellarvermessung auf.

N. 1—499.

	N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
			0	1	2	4	6	9	12	16	20
10	1	25	30	36	42	49	56	64	72	81	90
20	2	1 00	1 10	1 21	1 32	1 44	1 56	1 69	1 82	1 96	2 10
30	3	2 25	2 40	2 56	2 72	2 89	3 06	3 24	3 42	3 61	3 80
40	4	4 00	4 20	4 41	4 62	4 84	5 06	5 29	5 52	5 76	6 00
50	5	6 25	6 50	6 76	7 02	7 29	7 56	7 84	8 12	8 41	8 70
1'	6	9 00	9 30	9 61	9 92	10 24	10 56	10 89	11 22	11 56	11 90
10	7	12 25	12 60	12 96	13 32	13 69	14 06	14 44	14 82	15 21	15 60
20	8	16 00	16 40	16 81	17 22	17 64	18 06	18 49	18 92	19 36	19 80
30	9	20 25	20 70	21 16	21 62	22 09	22 56	23 04	23 52	24 01	24 50

Abbildung 5: Viertelquadratetafel [Laun1856]

Man beachte, dass die Nachkommastellen der Viertelquadrate ungerader Zahlen (.25) fehlen. Da bei zwei Zahlen  $a$  und  $b$  die Werte für  $a+b$  und  $a-b$  immer entweder beide gerade oder beide ungerade sind, würden sich die Nachkommastellen bei der anschließenden Subtraktion ohnehin aufheben.

## 2.2 Das Nomogramm von Nernst

Der Vermessungsrevisor Nernst aus Stralsund stellt 1831 eine Methode vor, die speziell zur Verwendung in Katasterämtern, wo von vornherein analog gegebene Werte aus Landkarten abgenommen werden, geeignet ist [Nern1831].

Es handelt sich im Prinzip um nichts weiter als den gezeichneten Graph der Parabel

$$f(x) = \frac{1}{8}x^2.$$

Um mittels dieses Graphen die Fläche eines Dreiecks mit Grundlinie  $g$  und Höhe  $h$  zu bestimmen, werden zunächst mit dem Zirkel die Werte  $(g + h)$  und  $(g - h)$  aus der Landkarte genommen. Anschließend werden diese Werte an der x-Achse der Parabel mit dem voreingestellten Zirkel abgemessen und an der y-Achse die zugehörigen Funktionswerte abgelesen und voneinander subtrahiert.

Da eine solche Parabel, wenn sie hinreichend genau sein soll, sehr groß werden kann, verwendet Nernst den Kniff, sie quasi auf einen Zylinder mit geeignetem Umfang aufzuwickeln und dessen Mantelfläche dann abzuwickeln.

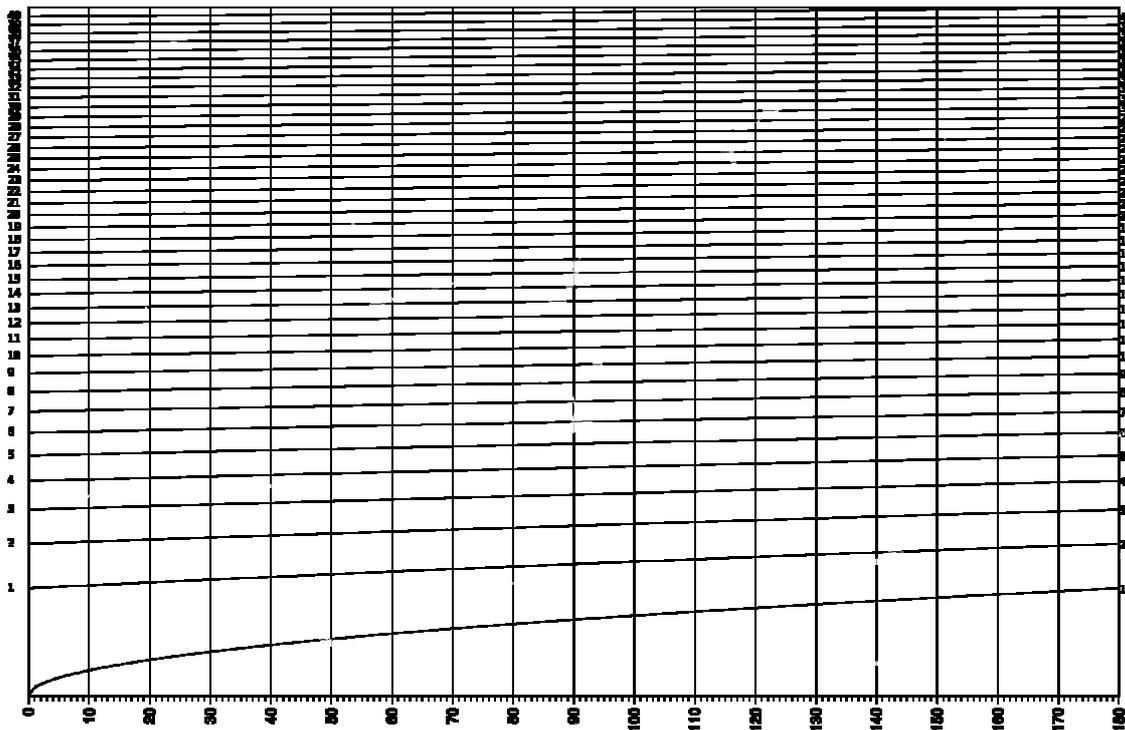


Abbildung 6: Das Nomogramm von Nernst

Im Gegensatz zu üblichen Funktionsdarstellungen ist hier die horizontale Achse die y-Achse.

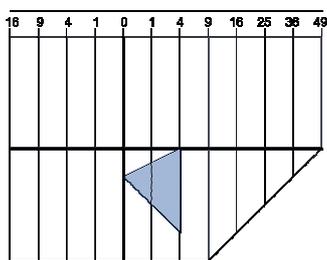
Hat man mit dem Zirkel einen Wert eingestellt, so setzt man die eine Spitze am Nullpunkt an und die andere oberhalb vom Nullpunkt auf der vertikalen Achse. Dann lässt man den Zirkel so lange entlang der horizontalen Achse gleiten, bis seine obere Spitze die Parabel trifft.

An der vertikalen Skala kann dann die Fläche in ganzen Morgen abgelesen werden und an der horizontalen Skala der darüber hinausgehende Anteil an Preußischen Quadratruten.

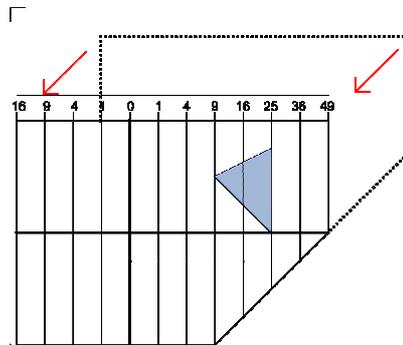
### 2.3 Die Viertelquadratetafel von Zimmermann

Noch einen Schritt weiter geht das Gerät von Ludwig Zimmermann, das dieser im Jahr 1906 in der Zeitschrift für Vermessungswesen beschreibt [Zimm1906]. Sein Instrument nimmt dem Benutzer auch die Subtraktion und Addition von Grundfläche und Höhe des Dreiecks ab. Lediglich die finale Subtraktion muss noch ausgeführt werden.

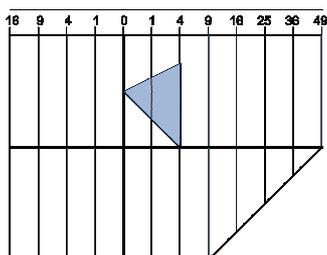
Es besteht aus einer transparenten Platte, die mit einem Koordinatenkreuz und senkrechten Linien als Ablesehilfe bedruckt ist. Am oberen Rand findet sich eine Achtelquadratskala. Eine Ecke der Platte ist im Winkel von 45 Grad abgeschnitten.



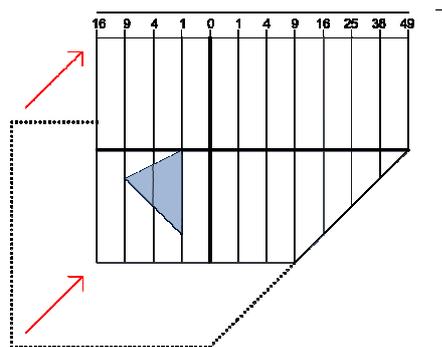
**Schritt 1:** Man lege die Glasplatte so auf das Dreieck dass die Grundlinie des Dreiecks senkrecht und parallel zu den Linien der Glasplatte verläuft. Die obere Ecke der Grundlinie berührt dabei die waagerechte Basislinie der Platte und die der Grundlinie gegenüberliegende Ecke die mit Null beschriftete senkrechte Achse der Glasplatte. Damit hat die Grundlinie den Abstand  $h$  von der senkrechten Achse, und an der Skala am oberen Rand kann der zugehörige Wert von  $\frac{1}{8} h^2$  abgelesen werden.



**Schritt 2:** Nun verschiebe man das Gerät mithilfe eines Lineals, entlang der abgeschrägten Kante, bis die untere Ecke mit der waagerechten Achse des Geräts zusammenfällt. Damit wurde das Gerät um die Länge der Dreiecksgrundlinie  $g$  in beide Richtungen, nach links und nach unten, verschoben, und damit die Länge der vertikalen Grundlinie  $g$  zur horizontalen Höhe  $h$  addiert. Am oberen Rand kann man nun den Wert von  $\frac{1}{8} (h + g)^2$  ablesen.



**Schritt 3:** Anschließend positioniere man die Glasplatte so auf dem Dreieck, dass wieder die Grundlinie parallel zu den Linien der Glasplatte verläuft und die gegenüberliegende Ecke die senkrechte Nulllinie der Glasplatte berührt, diesmal aber seine untere Ecke an die waagerechte Basislinie der Platte stößt.



**Schritt 4:** Wird nun das Gerät abermals entlang der abgeschrägten Kante so weit verschoben, bis diesmal die obere Ecke an die waagerechte Achse stößt, so entspricht diese Verschiebung einer Subtraktion von  $g$ , und am oberen Rand kann der Wert von  $\frac{1}{8} (h - g)^2$  abgelesen werden.

Die Differenz der beiden in Schritt 2 und Schritt 4 abgelesenen Werte ergibt die Fläche des Dreiecks.

## 2.4 Das Pedometer von Schiereck

Das Schierecksche Pedometer ist technisch deutlich aufwendiger als die bisher dargestellten Instrumente, dieser Aufwand wird aber eventuell durch eine effektivere Benutzbarkeit gerechtfertigt.

Nachdem das Gerät einmal in seine Ausgangsposition gebracht ist, sind nur noch zwei Handgriffe nötig, bis die zu subtrahierenden Achtelquadrate gleichzeitig an einer Skala abgelesen werden können.

Das Gerät besteht aus einem Winkelhaken, auf dem sich vier drehbare Rollen befinden, über die ein Seilzug geführt wird, der dort frei gleiten kann.

Auf dem unteren Arm des Winkelhakens ist ein Anschlag **A** fest montiert, der den Nullpunkt einer nach rechts laufenden Skala auf dem horizontalen Arm des Winkelhakens markiert.

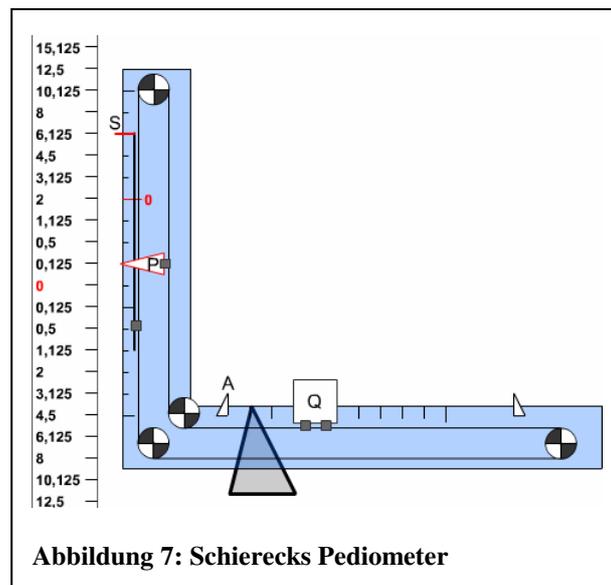
Am Seilzug ist ein Schieber **Q** montiert, der vom Anschlag **A** ausgehend nach rechts gleiten kann und dabei das Seil mit sich führt.

Im Bereich des vertikalen Teils des Winkelhakens ist am rechten Seilabschnitt ein pfeilförmiger Zeiger **P** befestigt, der sich mit dem Seil bewegt, am linken Seilabschnitt findet sich ein Bügel mit einem Zeiger **S**.

Liegt der Schieber **Q** am Anschlag **A**, also am Nullpunkt der horizontalen Skala, an, so zeigen die Zeiger **P** und **S** auf dem vertikalen Arm auf dieselbe Position, die den Nullpunkt einer Skala auf diesem Arm markiert.

Bewegt man den Schieber **Q** um eine bestimmte Strecke  $d$  nach rechts, so gleiten **P** und **S** gegenläufig jeweils um  $d$  nach unten bzw. nach oben.

Außerdem gehört zum Gerät ein Lineal, dessen Skala in der Mitte den Nullpunkt und in beide Richtungen Achtelquadratskalen aufweist.



Um die Fläche eines Dreiecks auszumessen, wird zunächst das Pedometer so positioniert, dass die Grundlinie des Dreiecks am oberen Rand des horizontalen Arms des Winkelhakens von **A** ausgehend nach rechts verläuft.

Am senkrechten Schenkel des Pedometers legt man das Lineal so an, dass die Zeiger **P** und **S** in der Ausgangsstellung auf den Nullpunkt der Linealskala weisen.

Dann wird mit dem Schieber **Q** die Länge  $g$  der Dreiecksgrundlinie abgemessen. Damit beträgt der Abstand von **A** zu **Q** nun  $g$  Längeneinheiten. Die Zeiger **P** und **S** sind gegenüber dem Nullpunkt um  $g$  nach oben bzw. unten verschoben.

und zeigen an der Linealskala jeweils auf  $\frac{g^2}{8}$ .

Nun wird das Pedometer am Lineal entlang senkrecht so weit nach oben geschoben, bis die Spitze des Dreiecks den oberen Rand des horizontalen Arms berührt. Das Gerät wurde damit

genau um die Höhe  $h$  des Dreiecks verschoben, und  $P$  und  $S$  zeigen nun auf  $\frac{(h+g)^2}{8}$  bzw.  $\frac{(h-g)^2}{8}$ . Die Differenz dieser beiden Werte ergibt nach der Viertelquadratformel  $\frac{1}{2} gh$ , also die gesuchte Dreiecksfläche.

## Literatur

- [AbCo1824] *Amtsblatt der Königlichen Regierung zu Coblenz* (1824)
- [Carv1837a] CARVALHO, David Nunes: Specification of the Patent granted to David Nunes Carvalho. In: *The Repertory of Patent inventions* (1837), S. 142 – 145
- [Carv1837b] CARVALHO, David Nunes: Verbesserungen im Treiben von Schiffen oder Schwimmenden Körpern im Wasser und von Wagen auf dem Lande, welche Verbesserung auch auf die Windmühlen und zu anderen Zwecken anwendbar sind, und worauf sich Hr. David Nunes Carvalho, in Fleet=Street, City of London, am 3. Dec. 1836, ein Patent ertheilen ließ. In: *Dinglers Polytechnisches Journal* (1837), S. 406 – 408
- [DrHa2009] DRECHSLER, Stefan und HAEBERLIN, Barbara: Prinzipien und Konstrukteure nichtintegrierender Planimeter, ein historischer Überblick. In: SCHMIDT, Werner und GIRBARDT, Werner (Hrsg.): *4. Symposium zur Entwicklung der Rechentechnik, Universität Greifswald*. Greifswald, 2009
- [Folk2006] FOLKERTS, Menso: Ein Außenseiter sucht den Kontakt zum "Fürsten der Mathematiker": J. F. Schiereck und C. F. Gauß. In: *Mitteilungen der Gauss-Gesellschaft e.V.* Nr. 43 (2006) S. 9 – 29
- [Folk2007] FOLKERTS, Menso: Die "Rechenmaschine" von J. F. Schiereck. In: Gudrun Wolfschmidt (Hrsg.): *"Es gibt für Könige keinen besonderen Weg zur Geometrie" Festschrift für Karin Reich*. Augsburg : Dr. Erwin Rauner Verlag, 2007, S. 111 – 132
- [From1840] FROME, Edward und WARREN, Charles: *Outline of the Method of Conducting a Trigonometrical Survey, for the Formation of Topographical Plans*. High Holborn : John Weale Architectural Library, 1840
- [Gieß1842] STADTARCHIV GIEßEN: *Josef Friedrich Schiereck, Lehrer der Mathematik und Katastergeometer, - Verschiedene Urkunden und Schreiben seiner Erfindung 1841/42*, Nr. 8079, Gießen, 1842
- [Laun1856] LAUNDY, Samuel Lynn: *Table of Quarter Squares*. London : Charles and Edwin Layton, 1856
- [Maye1908] MAYER, Eugene: *Das Rechnen in der Technik und seine Hilfsmittel*. Leipzig : Göschen, 1908
- [Mehm1902] MEHMKE, Rudolf: Numerisches Rechnen. In: *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, 1. Band, 2. Teil, Leipzig, 1900 – 1904, S. 941 – 1079
- [Nern1831] NERNST: Über die Einrichtung, den Gebrauch und die Vorzüge eines neuen Planimeters. In: *Sitzungsberichte des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses* 10 (1831), S. 88 – 89
- [Schi1820] SCHIERECK, Joseph: *Polygonometrie*. Gießen : Georg Friedrich Heyer, 1820
- [Schi1827a] SCHIERECK, Joseph: *Handbuch für Geometer*. Köln : Bachem, 1827

- 
- [Schi1827b] SCHIERECK, Joseph: *Tafeln aller Quadrate von 1 bis 10000*. Köln : Bachem, 1827
- [Schi1828] SCHIERECK, Joseph: *Errathende Rechenkunst*. Köln : Bachem, 1828
- [Schi1832] SCHIERECK, Joseph: Mathematisches. In: *Allgemeine Schulzeitung* (1832) Frankfurt am Main : Johann David Sauerländer, 1832
- [Schi1841] SCHIERECK, Joseph: Beschreibung des Pedimeters, eines Instruments, um den Flächeninhalt in Karten ohne Rechnung zu erhalten. In: *Dinglers Polytechnisches Journal* (1841), S. 251 – 265
- [Walk1833] WALKER, Georg: Anweisung zum Schachspielen. Frankfurt am Main : Johann David Sauerländer, 1833
- [Weis2006] WEISS, Stephan: Die Rekonstruktion der Rechenmaschine von Schiereck 1829.  
<http://www.mechrech.info/publikat/schierecka.pdf>
- [Zimm1906] ZIMMERMANN, Ludwig: Konstruktion eines Flächenmessers von Semmler. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen* (1906)