John Napiers Trigonometrie — ein Blick zurück

Urs Dietrich und Kurt Girstmair

Zusammenfassung

Dieser Artikel gibt einen Überblick über Napiers Beiträge zur sphärischen Trigonometrie, wobei die dafür notwendigen sachlichen und historischen Grundlagen weitgehend bereitgestellt werden. Da diese Beiträge in der Literatur trotz ihrer erheblichen Bedeutung ganz im Schatten von Napiers Logarithmen stehen, erscheint eine solche Zusammenschau gerechtfertigt. Auch kommen einige neue oder kaum bekannte Einzelheiten zur Sprache.

Einleitung

Sphärische Trigonometrie um das Jahr 1600 — kann das interessant sein? Mehreres spricht dafür: Zum einen hat diese Disziplin ihre Bedeutung für die Erdvermessung und die Navigation nie verloren, ja wenn man etwa an Satellitenbahnen denkt, dann hat die Bedeutung in den letzten Jahrzehnten sogar zugenommen. Zum anderen ist die Persönlichkeit des schottischen Gelehrten *John Napier* (1550–1617, vgl. Abb. 1) an sich schon interessant genug, um sie einem größeren Publikum bekannt zu machen (vgl. Abschnitt 9). Seine Trigonometrie ist außerdem nicht nur von praktischem Wert, sondern auch ästhetisch reizvoll (vgl. etwa Abschnitte 4 und 7).

Napier gilt neben dem Schweizer Jost Bürgi als einer der Erfinder des logarithmischen Rechnens und als Wegbereiter des Funktionsbegriffs. Seine *Logarithmen* sind in der Literatur ausführlich gewürdigt worden — man vergleiche dazu etwa die Arbeiten von Moulton, Cajori und Gibson im großen Napier-Jubiläumsband [8] oder den Artikel [2] im Biographical Dictionary of Mathematicians. Demgegenüber werden seine Beiträge zur *Trigonometrie* eher stiefmütterlich behandelt: Im genannten Band [8] befasst sich nur der Aufsatz von Sommerville mit einem jener Beiträge, nämlich den Napierschen Regeln. Desgleichen findet man im besagten biographischen Artikel zum Thema Trigonometrie praktisch nichts. Das hat sich auch in den letzten Jahrzehnten nicht geändert. Wer sich heute einen Überblick über Napiers trigonometrische Resultate verschaffen will, ist wohl immer noch auf den zweiten Band von Braunmühls Geschichte der Trigonometrie [4] angewiesen, worin man alles Wesentliche findet.

Wozu also der vorliegende Artikel, wenn es Braunmühl gibt? Nun, seine Darstellung ist nicht *self-contained*, wie man heute sagen würde. Es wird einerseits die sphärische Trigonometrie als bekannt vorausgesetzt. Diese kommt freilich im heutigen Unterricht an Schulen und Universitäten oft nur noch am Rande zur Sprache. Darum wollen wir zunächst eine kleine Einführung geben, jedoch manche Grundlagen erst besprechen, wenn sie wirklich benötigt werden. Andererseits wird das Thema Napier bei Braunmühl naturgemäß nicht historisch abgerundet: Über wichtige Vorgänger (wie Regiomontan) muss sich der Leser an anderen Stellen des im wesentlichen chronologisch aufgebauten Werks orientieren. Wir werden versuchen, auch in dieser Hinsicht einigermaßen *self-contained* zu sein. Ferner hat sich der Zugang zu diesem Thema in den hundert Jahren seit Braunmühl so sehr verändert, dass man einen frischen Blick wagen darf. Schließlich können wir das eine oder andere neue oder kaum bekannte Detail beisteuern, wie etwa die Besprechung eines Fehlers bei John Napier, vgl. Abschnitt 10. Dieser Abschnitt bietet zugleich einen Einblick in eine frühe Phase von Napiers Forschungen.

Abbildung 1: *John Napier (Stich nach einem Gemälde von 1616)*

Unsere Einführung in die sphärische Trigonometrie ist der Betrachtungsweise der Zeit Napiers verpflichtet. Sie ist nicht völlig systematisch und auch nicht lückenlos. So wären manchmal Fallunterscheidungen erforderlich, wenn man anstelle eines spitzwinkligen ein stumpfwinkliges Dreieck zugrunde legt. Wir besprechen oft nur einen *exemplarischen* Fall und übergehen den Rest mit Stillschweigen. Man bedenke dies besonders in den Abschnitten 6 und 7.

1. Sphärische Trigonometrie

Bis in die Neuzeit ist die Trigonometrie fast ausschließlich eine Hilfsdisziplin der Astronomie. Sie spielt sich auf der *Himmelssphäre* ab, deren Mittelpunkt die winzige Erdkugel bildet. Diese Sphäre dreht sich um die Himmelsachse, und zwar in ungefähr 24 Stunden um 360 Grad. Für uns ist die Himmelsachse die Verlängerung der Erdachse, die Schnittpunkte dieser Achse mit der Himmelssphäre sind die beiden *Himmelspole*. Denken wir uns drei Punkte auf der Himmelssphäre durch Großkreisbögen verbunden, so erhalten wir ein *sphärisches Dreieck*. Ein typisches Beispiel ist das Dreieck, das den nördlichen Himmelspol A, den Zenith B eines Beobachters (nördlich des Äquators) und einen weiteren Punkt C auf der Himmelssphäre als Eckpunkte hat. Man kann sich C als Position eines Gestirns denken. Die Meridianbögen c (Meridian des Beobachters) und b (Meridian des Gestirns) sowie der Großkreisbogen a, der B und C verbindet, bilden die *Seiten* des Dreiecks. Diese Seiten werden von der Erde aus im *Winkelmaß* gemessen. Befindet sich der Beobachter etwa auf 29 Grad nördlicher Breite, so ist $c = 90° - 29° = 61°$. Daneben hat das Dreieck aber auch *Winkel* im eigentlichen Sinn.

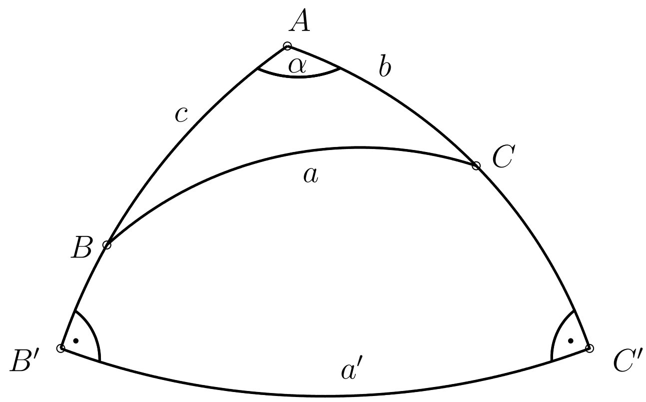

Abbildung 2

So erhält man den Winkel α bei A, indem man die Seite c wie im Bild auf $90°$ bis zum Punkt B' verlängert, ebenso b auf $90°$ bis C'. Der Winkel, durch den die Seite a' des Dreiecks $AB'C'$ (die Teil des Himmelsäquators ist) im obigen Sinn gemessen wird, ist dann gleich groß wie der Winkel α, den die Tangenten an die Meridiane im Pol einschließen. Wir drücken dies in der Form $a' = \alpha$ aus.

Der fundamentale Satz der sphärischen Trigonometrie ist der *sphärische Cosinussatz* in seinen beiden Ausformungen (vgl. [3] oder [17], Kap. 10). Der *Seitencosinussatz* lautet

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha. \tag{1}$$

Damit kann der oben genannte Beobachter, wenn er die Seiten a, b, c gemessen hat, den Winkel α ausrechnen. Er kennt so den Unterschied, der zwischen seiner eigenen geographischen Länge und der Länge jenes Ortes auf der Erde besteht, über dem das Gestirn C steht. Mit entsprechender Zusatzinformation (wo steht das Gestirn zu welchem Zeitpunkt?) lässt sich dann die geographische Länge des Beobachters bestimmen.

Natürlich spielen a, b, c und α dabei keine ausgezeichnete Rolle. Der Satz bleibt also richtig, wenn man in (1) die Seiten a, b, c und gleichzeitig die Winkel α, β, γ zyklisch vertauscht. Mit Hilfe von (1) kann man aber nicht nur (wie angedeutet) aus drei Seiten einen Winkel berechnen. Ebensogut kann man aus zwei Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel die dritte Seite bestimmen (berechne etwa a aus b, c und α). In der Sprechweise der Schulgeometrie wäre das eine der SSS-Fall, das andere der SWS-Fall. Aber auch der SSW-Fall (gegeben sind zwei Seiten und ein Winkel, der einer dieser

Seiten gegenüber liegt) lässt sich mit (1) grundsätzlich lösen: Kennt man a, b und α, so führt (1) auf eine quadratische Gleichung für $\cos c$, indem

$$\sin c = \sqrt{1 - \cos^2 c} \tag{2}$$

verwendet wird. Hier ist zu bemerken, dass alle Seiten und Winkel des Dreiecks zwischen 0° und 180° liegen. Demzufolge ist $\sin c$ immer positiv, d. h., es reicht aus, in (2) die *positive* Wurzel zu nehmen. Die quadratische Gleichung liefert fallweise dennoch zwei geometrisch sinnvolle Lösungen für c, mitunter aber auch gar keine.

Im Unterschied zu ebenen Dreiecken ist die Winkelsumme $\alpha+\beta+\gamma$ eines sphärischen Dreiecks immer größer als 180° (und $< 540^\circ$, da jeder Winkel $< 180^\circ$ ist). Demzufolge bilden auch die Winkel eines sphärischen Dreiecks drei unabhängige Bestimmungsstücke. Der *Winkelcosinussatz*

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a \tag{3}$$

erlaubt es, auch die verbleibenden Grundaufgaben zu lösen, also zunächst den WWW-Fall und den WSW-Fall zu behandeln. Im Fall WWS (zwei Winkel und die Seite, die einem der Winkel gegenüber liegt) kommt man mit Hilfe der Beziehung (2) wieder auf eine quadratische Gleichung.

Für einen Beweis des Cosinussatzes verweisen wir auf das nette Büchlein [18] oder umfangreichere Darstellungen in [3] oder in [17]. Dass die beiden Versionen (1) und (3) äquivalent sind, wird in Abschnitt 6 gezeigt.

2. Napiers Voraussetzungen

Sphärische Trigonometrie finden wir bereits im *Almagest*, dem großen astronomischen Handbuch des Claudius Ptolemäus (um 150 n. Chr.), wenngleich in ganz anderer Gestalt als heute (vgl. [16], Band I, p. 45 ff.). Die griechische Mathematik (und dazu zählt auch der Almagest) kannte noch keine Formelschreibweise. Vielmehr wurde jedes Resultat — und auch jeder Beweis — in Worten formuliert und durch begleitende Skizzen verdeutlicht. Ohne solche Skizzen wäre es oft sehr schwierig, die kunstvoll verschachtelten griechischen Satzperioden zu verstehen. Die Griechen der Antike benutzten auch nur *ein* Alphabet, nämlich das der griechischen Großbuchstaben (Kleinbuchstaben wurden erst im Mittelalter eingeführt). Das hat den Effekt, dass Punkte mit Großbuchstaben, Strecken oder Kreisbögen aber meist durch deren Endpunkte bezeichnet werden. In dieser Tradition steht die Mathematik bis weit ins 17. Jahrhundert hinein, und auch John Napiers Hauptwerke (veröffentlicht 1614 bzw. 1619) fallen darunter.

Als Anschauungsbeispiel folgt unsere wörtliche Übersetzung der Formulierung des Seitencosinussatzes (1) aus Regiomontans Buch „De triangulis omnimodis“(vgl. [15], p. 127; das Werk wurde erstmals 1533 gedruckt, fast 60 Jahre nach dem Tod des Autors):

In jedem aus Großkreisbögen bestehenden sphärischen Dreieck ist das Verhältnis des Sinus versus eines beliebigen Winkels zur Differenz zweier anderer Sinus versi, von denen einer zur Seite gehört, die jenen Winkel überspannt, der andere zur Differenz der beiden Bögen, die jenem Winkel anliegen, gleich dem Verhältnis des Quadrates des Sinus des rechten Winkels zu dem Rechteck aus den Sinus der dem genannten Winkel anliegenden Bögen.

Regiomontan erläutert diesen Satz dann anhand einer Skizze, und auch wir wollen das anhand von Abbildung 2 tun. *Sinus* im Sinne Regiomontans (auch Sinus rectus genannt) bedeutet soviel wir $R \cdot \sin$, wobei R der fest gewählte (große) Radius der Kugel ist, auf der sich alles abspielt. Demzufolge ist der Sinus des rechten Winkels gleich R. Der *Sinus versus* ist hingegen soviel wie $R \cdot (1 - \cos)$. Regiomontan sagt also, dass die Identität von Verhältnissen

$$R(1 - \cos\alpha) : (R(1 - \cos a) - R(1 - \cos(b - c))) = R^2 : (R \sin b \cdot R \sin c) \tag{4}$$

besteht. Wenn wir die Radien auf beiden Seiten kürzen und die Differenz im Nenner der linken Seite vereinfachen, erhalten wir

$$(1 - \cos\alpha) : (\cos(b - c) - \cos a) = 1 : (\sin b \sin c),$$

bzw. nach Auflösung dieser Proportion

$$\sin b \sin c - \sin b \sin c \cos\alpha = \cos(b - c) - \cos a. \tag{5}$$

Mit Hilfe der Formel $\cos(b - c) = \cos b \cos c + \sin b \sin c$ geht (5) wirklich in (1) über.

Regiomontan wendet seinen Satz auf den Fall an, dass die drei Seiten gegeben sind und ein Winkel daraus berechnet werden soll. Sinngemäß sagt er dazu, dass man aus der Identität (4) eine der vier auftretenden Größen a, b, c, α berechnen kann, wenn man die drei anderen kennt. Wenn man das im Fall SSS macht, gelangt man nach Formel (5) am Ende zu

$$\operatorname{sinvers}\alpha = \frac{\operatorname{sinvers} a - \operatorname{sinvers}(b - c)}{\sin b \sin c}, \tag{6}$$

wobei wir ganz im Sinne Regiomontans die Bezeichnung

$$\operatorname{sinvers} = 1 - \cos$$

benützen.

Hat man nur eine Sinustabelle zur Verfügung, so erfordert die Auswertung der rechten Seite von (6) neben Subtraktionen eine Multiplikation (im Nenner) und eine Division. Diese Rechenarten waren — mit mehrstelligen Zahlen — mühsam auszuführen, und so hätte man zu Napiers Zeit den Nenner mit Hilfe der Identität

$$\sin a \sin b = (\cos(a - b) - \cos(a + b))/2 \tag{7}$$

rechnerisch einfacher gestaltet. Man nannte die Anwendung solcher Tricks *Prosthaphärese* (der Begriff stammt aus dem Almagest), was etwa mit „Hinzufügung und Wegnahme“ übersetzt werden kann. In der Tat wird so die Multiplikation auf Addition, Subtraktion und Halbierung zurückgeführt.

Die Anwendung der Prosthaphärese war für Napiers Zeitgenossen keine ganz leichte Sache, da sie ja keine Formeln zur Verfügung hatten und die hier benützte Identität (7) nur in Form eines schwerfälligen Satzes vorlag (vgl. [4], Bd. 1, p. 197 ff.).

3. Logarithmen und Trigonometrie

Zur Vereinfachung von Rechnungen, wie sie im vorigen Abschnitt auftraten, erfand John Napier den *Logarithmus* — und benannte ihn auch so. Er publizierte sowohl sein Logarithmensystem als auch seine Trigonometrie in zwei kleinen Büchlein, die die Titel *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614) und *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (erschienen 1619, also schon nach Napiers Tod) tragen. Beide Werke wurden 1620 zusammen — jedoch mit jeweils eigener Seitenzählung — erneut herausgegeben, vgl. [11]. Diese Ausgabe ist als Digitalisat derzeit allgemein zugänglich (s. Literaturverzeichnis). Wir zitieren Napiers Büchlein unter den Namen *Descriptio* und *Constructio* immer nach [11].

Die gemeinsame Veröffentlichung von Logarithmen und Trigonometrie erklärt sich dadurch, dass Napier in der Trigonometrie die *Hauptanwendung* des logarithmischen Rechnens sieht. Sein Ziel ist es, durchgehend logarithmische Berechnungen in der sphärischen Trigonometrie zu ermöglichen. Dazu muss er deren Formeln so umgestalten, dass darin nur noch *Produkte* und *Quotienten* von Werten trigonometrischer Funktionen auftreten — nicht jedoch deren Summen oder Differenzen. Nach Anwendung des Logarithmus reduziert sich dann die Rechnung auf *Additionen* und *Subtraktionen*. Man muss dabei aber bedenken, dass nur *wir* von Formeln sprechen können, nicht jedoch Napier selbst. Wir tun dem Verständnis seiner Ideen auch keinen Abbruch, wenn wir seinen noch etwas unhandlichen Logarithmus (vgl. [1], [6]) durch den *dekadischen* Logarithmus log ersetzen, der bald nach Napier von dessen Freund *Henry Briggs* (1561–1630) eingeführt worden ist. Es soll also $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$ usw. gelten. Außerdem wird der Radius R des vorigen Abschnitts immer gleich 1 gesetzt.

Braunmühl sagt zurecht, dass Napier die sphärischen Trigonometrie vollständig reorganisiert hat (vgl. [4], Bd. 2, p. 12). Freilich leidet diese Reorganisation teilweise darunter, dass sich Napier auch noch der Prosthaphärese verpflichtet fühlt. Das hat zur Folge, dass er neben die „logarithmischen“ Sätze oft „prosthaphäretische“ Resultate stellt, die dasselbe leisten (vor allem in der *Constructio*). Eine derartige Doppelgleisigkeit ist aus unserer Sicht Napiers Hauptanliegen abträglich, wenn auch für seine Zeit sehr verständlich.

4. Die Napierschen Regeln

In Buch II, Kapitel IV, der *Descriptio* formuliert Napier die nach ihm benannten Regeln am rechtwinkligen sphärischen Dreieck. Sei dazu ABC ein sphärisches Dreieck mit einem rechten Winkel in C.

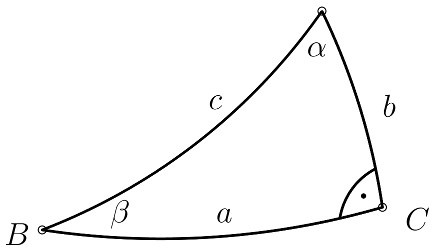

Abbildung 3

Die natürlichen Bestimmungsstücke dieses Dreiecks sind (unter Weglassung von $\gamma = 90°$) a, b, α, c, β. Man sagt, dass die in dieser Aufzählung aufeinanderfolgenden Stücke aneinander *anliegen* und dass schließlich β an a (bzw. a an β) anliegt.

Die Katheten a und b werden nun durch ihre Komplemente $\overline{a} = 90° - a$, $\overline{b} = 90° - b$ ersetzt. Dann nennt man $\overline{a}$, $\overline{b}$, α, c, β die *zirkulären Stücke* des Dreiecks (das ist eine Übersetzung von „partes circulares").

Es gelten Napiers Regeln (vgl. [11], *Descriptio*, p. 33):

(a) *Der Cosinus eines jeden (zirkulären) Stücks ist gleich dem Produkt der Cotangenten der anliegenden Stücke.*
(b) *Ebenso ist dieser Cosinus gleich dem Produkt der Sinus der nicht anliegenden Stücke.*

Betrachten wir etwa das Stück c, dessen nicht anliegende Stücke $\overline{a}$ und $\overline{b}$ sind. Nach Regel (b) gilt $\cos c = \sin \overline{a}\, \sin \overline{b}$, also

$$\cos c = \cos a\, \cos b, \tag{8}$$

was wir sofort mit Hilfe des Seitencosinussatzes (1) verifizieren, da $\gamma = 90°$ und folglich $\sin a\, \sin b\, \cos \gamma = 0$. Ebenso gilt nach Regel (a) für die an c anliegenden Stücke α und β

$$\cos c = \cot \alpha\, \cot \beta, \tag{9}$$

denn nach dem Winkelcosinussatz (3) gilt $\cos \gamma = 0 = -\cos \alpha\, \cos \beta + \sin \alpha\, \sin \beta\, \cos c$; also liefert Division durch $\sin \alpha\, \sin \beta$ das Gewünschte. Napiers Regeln besagen, dass die Formeln (8), (9) richtig bleiben, wenn man die zirkulären Stücke zyklisch vertauscht. Man gewinnt so etwa aus (8) die Aussage $\cos \beta = \sin \alpha\, \cos b$. Formeln dieser Art eignen sich sehr gut für das logarithmische Rechnen. Hat man beispielsweise $\log \tan \alpha$ und $\log \tan \beta$ in einer Tabellle abgelesen, so ist $-\log \cos c$ nach (9) die Summe dieser Zahlen, und die Tabelle liefert dann c.

Schon vor Napier kannte man alle zehn Formeln, die aus (8) und (9) entstehen, wenn man die zirkulären Stücke zyklisch vertauscht. Es könnte also der Eindruck entstehen, dass die Napiersche Regeln nur eine *mnemotechnische* Erfindung darstellen, die aus zehn Formeln zwei macht. Das jedoch ist nicht richtig — und auch in der Literatur klargestellt worden, vgl. etwa [9] und [3], p. 19 ff. Denn dahinter steht eine schöne geometrische Einsicht, die wir hier vorstellen wollen.

Dies erfordert freilich einen zusätzlichen Begriff aus der sphärischen Geometrie, der anhand von Abbildung 2 klar wird: Es sei A ein beliebig gewählter Punkt auf der Himmelssphäre, die ebenfalls beliebig gewählten Großkreisbögen b und c durch A werden jeweils auf $90°$ verlängert. Der Großkreisbogen $B'C'$ liegt dann in jener Ebene durch den Mittelpunkt M der Sphäre, die auf AM senkrecht steht. Man nennt den von dieser Ebene ausgeschnittenen Großkreis die *Polare* zu A. Ist also A der Nordpol, so ist die Polare dazu der (Himmels-) Äquator. Die Winkel bei B' und C' betragen jeweils 90 Grad. Das Beispiel des Äquators lässt dies gut erkennen, denn jeder Meridian schneidet den Äquator rechtwinklig. Durch diese Schnittwinkel kann man die Polare zu A *ebenfalls* charakterisieren: Sie ist jener Großkreis, der von zwei verschiedenen (und damit von allen) Großkreisen durch A rechtwinklig geschnitten wird.

Wir halten uns im weiteren an Napier's eigene, beispielhaft gewählte Konfiguration (vgl. [11], *Descriptio*, p. 32), wenn wir auch seine Argumente etwas modifizieren.

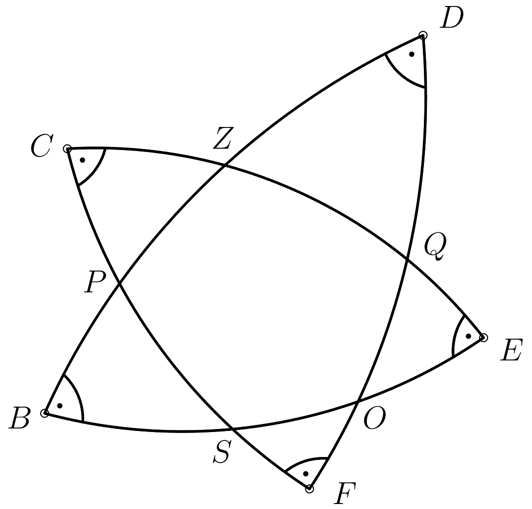

Abbildung 4

Wegen der geringen Größe der Erde im Verhältnis zur Himmelssphäre kann man annehmen, dass die Ebene des Horizonts durch den Mittelpunkt M der Himmelssphäre geht. Diese Ebene schneidet auf der Sphäre den *Kreis des Horizonts* aus. Sei BS ein Teil dieses Kreises, die Sonne befinde sich (am Horizont) in S. Der Meridian PB des Beobachters schneide den Horizontkreis in B, und P sei der Nordpol. Der Winkel bei B beträgt 90°. Der Bogen PS ist der Meridian der aktuellen Sonnenposition. Verlängert man den Meridian PB über P hinaus um 90°, so gelangt man zum Punkt D auf dem Himmelsäquator. Wenn man andererseits den Meridian PS über S hinaus auf insgesamt 90° verlängert, kommt man zum Punkt F, der auch auf dem Äquator liegt. Der Bogen DF stelle den zugehörigen Teil des Äquators dar. Dann hat man, wie oben festgestellt, bei D und F rechte Winkel. Was für den Punkt P gemacht wurde, lässt sich nun auch für S machen: Man verlängert BS über S hinaus um 90° und ergänzt den Bogen SP über P hinaus auf 90°. Der auf diese Weise gefundene Kreisbogen CE liegt auf der Polaren zu S, und die Winkel bei C und E sind wiederum rechte. Insgesamt haben wir so ein sphärisches Fünfeck $OQZPS$ gewonnen, an dessen Seiten fünf rechtwinklige sphärische Dreiecke anliegen.

Es stellt sich jetzt heraus, dass die zirkulären Stücke dieser fünf Dreiecke bis auf zyklische Vertauschung identisch sind. Wir zeigen dies exemplarisch für die Dreiecke BSP und CPZ. Im Fall von BSP sind diese Stücke

$$90^\circ - PB,\ 90^\circ - BS,\ \angle S,\ PS,\ \angle P. \tag{10}$$

Für das Dreieck CPZ haben wir entsprechend

$$90^\circ - ZC,\ 90^\circ - CP,\ \angle P,\ PZ,\ \angle Z. \tag{11}$$

Ein offensichtlich gemeinsames Stück ist $\angle P$. Dessen „Vorgänger“ im Dreieck CPZ, nämlich $90^\circ - CP$, ist gleich PS, da C durch Ergänzung von PS auf 90° gewonnen wurde. Der „Nachfolger“ von $\angle P$ im zweiten Dreieck ist PZ. Nun ist freilich BE Teil der Polaren zu Z, denn die Winkel bei B und E sind rechte — was die Polare charakterisiert. Daher gilt $ZB = 90^\circ$ und somit $PZ = 90^\circ - PB$. Da BE Teil der Polaren zu Z ist, kann man den *Innenwinkel* des Fünfecks im Eckpunkt Z am Bogen BE wiederfinden, wie in

Abschnitt 1 anhand der Abbildung 2 klargemacht wurde. Dieser Innenwinkel ist aber $180^\circ - \angle Z$, und da SE (die Verlängerung von BS) 90° beträgt, ist $90^\circ - \angle Z = BS$, also $\angle Z = 90^\circ - BS$. Mit ähnlichen Überlegungen für den Innenwinkel des Fünfecks bei S weist man $90^\circ - ZC = \angle S$ nach.

Wir haben daher gezeigt, dass die Folge (11) von zirkulären Stücken die Form

$$\angle S,\ PS,\ \angle P,\ 90^\circ - PB,\ 90^\circ - BS$$

hat. Somit wurden die Glieder der Folge (10) nur um zwei Positionen nach links verschoben. Wenn wir die Formel (8) — für die zirkulären Stücke formuliert — auf die Hypotenuse des ersten Dreiecks anwenden, erhalten wir

$$\cos(PS) = \sin(90^\circ - PB)\,\sin(90^\circ - BS).$$

Dieselbe Vorgangsweise liefert für das zweite Dreieck

$$\cos(90^\circ - PB) = \sin(\angle S)\,\sin(PS).$$

Dies aber lässt sich (im Sinne der Napierschen Regel (b)) auch als Aussage über das erste Dreieck lesen.

Die beiden betrachteten Dreiecke spielen keine ausgezeichnete Rolle, denn die Geometrie ist für jedes andere Dreieck dieselbe. So ist beispielsweise der Bogen CF Teil der Polaren zu Q. Dies bedeutet, dass alle fünf rechtwinkligen Dreiecke *dieselben* zirkulären Stücke haben, deren Position sich freilich jedesmal verschiebt. Im Dreieck DZQ etwa liegen dieses Stücke um zwei Positionen weiter links als in CPZ. Somit liefern (8) und (9) jeweils fünf Formeln — oder eben die beiden Regeln (a) und (b).

Die Fünfecksfigur von Abbildung 4 wurde von Gauß als *Pentagramma mirificum*, also als „wunderbares Fünfeck“, bezeichnet (vgl. [4], Bd. 2, p. 12, Fußnote 4). Es entspricht jedoch nicht den Tatsachen, dass die Napierschen Regeln erst von Gauß theoretisch begründet worden sind, wie in [17], p. 284, behauptet wird. In der Tat zeugt Napiers Idee (die durchaus ihre Vorläufer hatte, vgl. die zitierte Seite) von einer bemerkenswerten Verbindung von geometrischer Intuition mit praktischer Organisation. Napier formuliert seine Regeln übrigens durchwegs logarithmisch, etwa im Sinne des im Anschluss an (9) Gesagten. Er ist sich des praktischen Werts dieser Erkenntnisse sehr bewusst, denn er mahnt dazu, die Konfusion, die durch die natürlichen Bestimmungsstücke und ihre Regeln entstehe, mit Hilfe seiner Regeln zu vermeiden (vgl. [11], *Descriptio*, p. 33). In dem schon genannten Artikel [2] werden diese Regeln „Napiersche Analogien“ genannt, darunter wird jedoch im Allgemeinen etwas anderes verstanden (vgl. Abschnitt 7).

5. Halbwinkelsätze

Ebenfalls in der *Descriptio* findet man zwei Sätze, die sich vorzüglich zur logarithmischen Behandlung des SSS-Falls eines *beliebigen* sphärischen Dreiecks ABC eignen. Der eine davon lautet

$$\sin^2(\alpha/2) = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}, \tag{12}$$

wobei $s = (a+b+c)/2$ sein soll. Betrachten wir dazu (vgl. Abbildung 2) die Seite a als die „Basis“ des Dreiecks, α als den Winkel an dessen Spitze sowie b und c als dessen

„Schenkel", so haben wir im wesentlichen Napiers Terminologie. Seine Formulierung von (12) lautet in unserer Übersetzung so (vgl. [11], *Descriptio*, p. 47):

Zieht man die Summe der Logarithmen der Schenkel von der Summe der Logarithmen des Aggregats aus halber Basis und halber Differenz der Schenkel sowie von deren Differenz ab, so bleibt der doppelte Logarithmus des halben Winkels an der Spitze übrig.

Dabei muss man beachten, dass „Logarithmus" hier soviel wie $\log\sin$ bedeutet (vgl. Abschnitt 3). Man hat demnach $\log\sin b + \log\sin c$ zu bilden und dies von der Summe der beiden Ausdrücke $\log\sin(a/2 + (b-c)/2)$ und $\log\sin(a/2 - (b-c)/2)$ abzuziehen — die letzten beiden Sinus haben als Argumente das „Aggregat" und die Differenz aus halber Basis und halber Differenz der Schenkel. Das ergibt dann $2\log\sin(\alpha/2)$. Dies lässt sich nun leicht in Formel (12) übersetzen.

Napiers *Beweis* dieser Formel ist sehr kurz. Aus Regiomontans Cosinussatz (6) (wobei wir dort, im Unterschied zu Regiomontan und Napier, den Radius $R = 1$ gewählt haben), gewinnt er die Proportion

$$\sin b \sin c : 1 = (\operatorname{sinvers} a - \operatorname{sinvers}(b-c)) : \operatorname{sinvers} \alpha.$$

Die rechte Seite, sagt er, verhält sich aber wie

$$\sin(a/2 + (b-c)/2)\sin(a/2 - (b-c)/2) : \sin^2(\alpha/2),$$

woraus seine Aussage folgt. Diese sehr knappe Argumentation können wir einerseits um

$$\operatorname{sinvers} a - \operatorname{sinvers}(b-c) = \cos(b-c) - \cos(a) = 2\sin(a/2 + (b-c)/2)\sin(a/2 - (b-c)/2)$$

erweitern, eine Identität, die zu Napiers Zeit aus der Prosthaphärese (vgl. Abschnitt 2) bekannt war. Andererseits kannte man auch

$$\operatorname{sinvers} \alpha = 2\sin^2(\alpha/2),$$

womit Napiers Aussage bewiesen ist. In der *Descriptio* findet sich auch das Analogon von (12) für den Cosinus, nämlich

$$\cos^2(\alpha/2) = \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}. \tag{13}$$

Beide Formeln sind vom rechnerischen Standpunkt äquivalent, denn wegen $0° < \alpha/2 < 90°$ ist $\alpha/2$ sowohl durch seinen Sinus als auch durch seinen Cosinus eindeutig bestimmt. Vielleicht ist dies mit ein Grund, warum Napier auf einen Beweis von (13) verzichtet und nur „quod alterius loci est demonstrare" sagt (vgl. [11], *Descriptio*, p. 48). Napiers Sätze (12) und (13) liefern sofort die Formel

$$\tan^2(\alpha/2) = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}. \tag{14}$$

In modernen Darstellungen der sphärischen Trigonometrie heißen die Formeln (12) bis (14) „Halbwinkelsätze"(vgl. etwa [5] p. 207, [17], p. 254 f.). Bei Napier findet man den letzten dieser Halbwinkelsätze nicht.

6. Polarformeln

Eine wichtige Begriffsbildung in der sphärischen Trigonometrie ist die des *Polardreiecks*. Dieses entsteht, indem man zu jedem Eckpunkt des Dreiecks ABC die Polare bildet. Man kann sich das so vorstellen: Wie in Abbildung 5 werden die Seiten c und b von A weg bis zu den Punkten X und Y auf 90° ergänzt. Der Großkreis durch X und Y ist dann die Polare zu A. Analog erstellt man die Polaren von B und C.

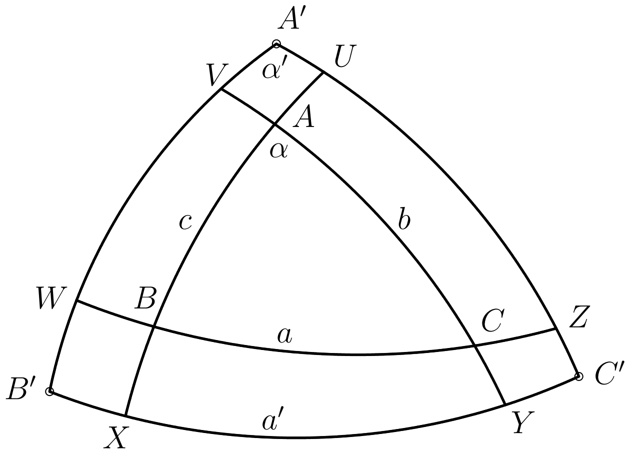

Abbildung 5

Die so erhaltenen Polarenbögen schneiden sich in A', B' und C'. Mit Überlegungen wie in Abschnitt 4 findet man, dass der Winkel α' gleich $180° - a$ ist. Denn a ist Teil der Polaren zu A', da die Winkel bei Z und W rechte sein müssen. Wegen $CW = 90°$ und $BZ = 90°$ folgt $WZ = 180° - a$, und nach Abschnitt 1 ist α' gleich WZ. Auf ähnliche Weise zeigt man, dass $a' = B'C' = 180° - \alpha$. Mit anderen Worten: Die Winkel des Polardreiecks sind die Supplemente der Seiten, und die Seiten des Polardreiecks sind die Supplemente der Winkel des ursprünglichen Dreiecks.

Wendet man etwa den Seitencosinussatz auf das Polardreieck an, so geht er in den Winkelcosinussatz über, und umgekehrt. Es reicht also aus, *einen* dieser beiden Sätze zu beweisen, der andere folgt — als „polare Version“ davon — sozusagen automatisch. Die polaren Versionen der Halbwinkelsätze heißen *Halbseitensätze*; so geht etwa (14) über in den Halbseitensatz

$$\tan^2(a/2) = -\frac{\cos\sigma\ \cos(\sigma - \alpha)}{\cos(\sigma - \beta)\cos(\sigma - \gamma)}, \tag{15}$$

wobei $\sigma = (\alpha + \beta + \gamma)/2$ die halbe Winkelsumme ist. Wenn man beide Seiten von (15) logarithmiert, kann man den WWW-Fall auf ähnliche Weise logarithmisch behandeln, wie im vorigen Abschnitt den SSS-Fall. Halbseitensätze finden sich bei Napier nicht, allerdings ist das Polardreieck zu seiner Zeit bereits bekannt (vgl. [4], Bd. 1, pp. 182, 245). Er selbst benutzt auch schon „polare Begriffsbildungen“, um Seiten in Winkel und Winkel in Seiten überzuführen, vgl. [11], *Descriptio*, p. 55. Bald nach seinem Tod hat *Henry Gellibrand* den WWW-Fall in logarithmischer Form durch Anwendung von (12) auf das Polardreieck gelöst (vgl. [4], Bd. 2, p. 29).

7. Die Napierschen Analogien

Eines der bemerkenswertesten Resultate Napiers findet sich in [11], *Constructio*, p. 56, allerdings ohne Beweis. Es handelt sich um zwei von vier sogenannten „Napierschen Analogien". Die *erste Analogie* lautet in moderner Schreibweise

$$\tan(c/2) = \tan((a+b)/2) \cdot \frac{\cos((\alpha+\beta)/2)}{\cos((\alpha-\beta)/2)}. \tag{16}$$

Napier selbst hat statt des Bruchs auf der rechten Seite von (16) den komplizierteren Ausdruck

$$\frac{\sin((\alpha-\beta)/2)\sin(\alpha+\beta)}{\sin((\alpha+\beta)/2)\sin(\alpha-\beta)}$$

stehen, was aber auf dasselbe hinausläuft (man wende dazu die bekannte Formel für den Sinus des doppelten Winkels auf $(\alpha+\beta)/2$ und $(\alpha-\beta)/2$ an). Selbstredend bedient er sich wieder der „formellosen" Ausdrucksweise.

Wir wenden (16) sogleich auf die Fälle SSW und SWW an, die wir bis jetzt nur mit Hilfe einer wenig eleganten quadratischen Gleichung gelöst haben (vgl. Abschnitt 1). Dazu benötigen wir noch den *sphärischen Sinussatz*

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}, \tag{17}$$

der den arabischen Astronomen bereits um das Jahr 1000 bekannt war. Wir können ihn leicht aus den Napierschen Regeln herleiten, indem wir das Dreieck ABC durch eine Großkreisebene durch A unterteilen, die auf der Ebene von a normal steht. Dadurch zerfällt ABC in zwei rechtwinklige Dreiecke, die die gemeinsame Kathete h, die „Höhe", besitzen (diese kann auch außerhalb des Dreiecks liegen).

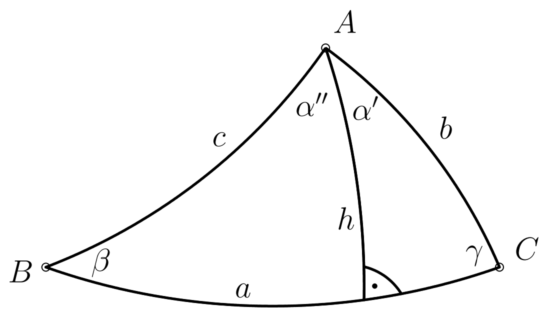

Abbildung 6

Schreibt man die Napiersche Regel (b) von Abschnitt 4 für das gemeinsame zirkuläre Stück $\overline{h} = 90° - h$ der beiden rechtwinkligen Dreiecke an, so ergeben sich $\sin h = \sin c \sin\beta$ und $\sin h = \sin b \sin\gamma$, woraus (17) durch Elimination von $\sin h$ folgt.

Sind nun a, b und α gegeben, so kann man aus (17) leicht den Winkel β berechnen. Zu beachten ist, dass β im Allgemeinen nicht eindeutig ist, denn das Supplement von β hat denselben Sinus. Diese Zweideutigkeit ist aber kein Nachteil, denn dadurch liefert uns (16) für jeden der beiden Werte von β eine Lösung für die Seite c, was tatsächlich geometrisch sinnvoll sein kann. Im SWW Fall können wir analog vorgehen, indem wir aus a, α, β die beiden möglichen Werte b ermitteln und dann wiederum (16) anwenden.

Napier selbst schreibt allerdings nichts über diese Anwendung (die übrigens auch durchgehend logarithmisch ist). Vielmehr beschränkt er sich auf die logarithmische Behandlung des WSW-Falls. Sind c, α und β gegeben, so kann man aus (16) nur $a+b$ berechnen. Seine *zweite* Analogie

$$\tan(c/2) = \tan((a-b)/2) \cdot \frac{\sin((\alpha+\beta))/2)}{\sin((\alpha-\beta)/2)}, \tag{18}$$

liefert nun freilich auch $a-b$, beide zusammen also a und b. Merkwürdigerweise findet sich in der *Constructio* diese zweite Analogie im wesentlichen in der Form (18), ohne dass Napier gesehen hätte, dass seine erste Analogie ähnlich einfach gestaltet werden kann. Henry Briggs (vgl. Abschnitt 3) hat die *Constructio* mit Anmerkungen versehen und dabei nicht nur die einfachere Form (16) der ersten Analogie, sondern auch die *Polarformeln* zu den beiden Analogien angegeben ([11], *Constructio*, p. 61). Damit ist die logarithmische Behandlung des SWS-Falls gleichfalls möglich. Aber auch Briggs gibt dafür keine Beweise. Der erste, noch umständliche Beweis der Analogien mittels geometrischer Überlegungen findet sich 1657 in der „Trigonometria“ von *Oughtred*, vgl. [4], Bd. 2, p. 42. Heute werden die Analogien meist *analytisch* nach einem auf Euler zurückgehenden Verfahren bewiesen (vgl. etwa [18]). Einen relativ einfachen *geometrischen* Beweis der Polarformel zur ersten Analogie findet man in [3], p. 30 f.

8. Napiers Erbe

Was bleibt von Napiers Ergebnissen? Nun ja, noch vor vierzig Jahren war die sphärische Trigonometrie an das logarithmische Rechnen gebunden, d. h., man benützte typischerweise

einen Halbwinkelsatz für SSS,
einen Halbseitensatz für WWW,
die beiden Analogien nebst ihren Polarformeln für SWS und WSW,
sowie eine der Analogien gemeinsam mit dem Sinussatz für die verbleibenden Fälle,

vgl. etwa [18], p. 25 ff., [17], p. 269 ff. Man könnte also sagen: Angewandte sphärische Trigonometrie bestand bis vor kurzem aus Sätzen Napiers und deren Polarformeln (wenn man vom Sinussatz absieht). Zwar entstanden im Laufe der Jahrhunderte weitere Hilfsmittel, die dasselbe leisten wie die Napierschen — eine wirklich einfachere logarithmische Rechnung erhält man mit diesen jedoch nicht.

Im Computer-Zeitalter kann man die Fälle SSS, WWW, SWS und WSW leicht mit Hilfe der beiden Cosinussätze lösen. Für SSW und SWW ist aber die gut zu merkende Analogie (16) zusammen mit dem Sinussatz immer noch das Mittel der Wahl. Denn die anderen möglichen Wege führen kaum zu einfacheren Formeln: Kennt man etwa b, c, β, γ, so liefern die Cosinussätze (1) und (3) ein lineares Gleichungssystem für $\cos a$ und $\cos\alpha$, das auf die Formel

$$\cos a = \frac{\cos\beta\cos\gamma - \cot b \cot c}{\sin\beta\sin\gamma - \csc b \csc c} \tag{19}$$

führt, wobei die Cosecans-Funktion der Kehrwert des Sinus ist, also $\csc = 1/\sin$. Nun ist auch (19) nicht schwer zu merken, sicher aber komplizierter als jede der Napierschen Analogien.

Ferner führen nicht wenige Aufgaben der sphärischen Astronomie auf *rechtwinklige* sphärische Dreiecke, vgl. [17], Kap. 19. In dieser Situation sind Napiers Regeln von Abschnitt 4 weiterhin nützlich.

9. Biographisches

Wer war John Napier, der für so lange Zeit die sphärische Trigonometrie geprägt hat und nach unserer Meinung auch heute noch einen Platz darin verdient? Kurz gesagt, ein adeliger Grundherr aus der Umgebung von Edinburgh, der seine Güter gut zu verwalten wusste und an den Ereignissen seiner Zeit lebhaften Anteil nahm. Wenig bekannt ist über seine Studien an der Universität von St. Andrews und über seine mathematische Ausbildung. In Schottland gab es damals kaum jemanden, bei dem er höhere Mathematik hätte lernen können (vgl. [19], p. 196 f. und [4], Bd. 2, p. 4). Napier war ein glühender Protestant und als solcher sehr besorgt, dass der schottische König Jakob VI., der in seiner Religionspolitik schwankte, doch noch zu den Katholiken umschwenken könnte. Deshalb riet er seinem König:

Therefore, Sir, let it be your M. [Majesty's] *continuall study (as called and charged thereunto by God) to reforme the universall enormities of your country, and first (taking example from the princely Prophet David) to begin at your M. owne house, familie and court, and purge the same of all suspicion of Papists, and Atheists or Newtrals ...*

Diese — selbst für unsere Zeit recht selbstbewusst klingende — Empfehlung an den König steht in der Widmung (Bl. A3, verso) zu Napiers Auslegung der Apokalypse [10]. Die Auslegung erschien erstmals 1593 und war das erste Buch, das Napier veröffentlichte. Seine Zeitgenossen — und wohl auch er selbst — haben es als sein bedeutendstes Werk überhaupt angesehen. Es wurde viel öfter gedruckt und übersetzt als alle seine mathematischen Abhandlungen. Die Botschaft der Apokalypse (die zu allen Zeiten zu Spekulationen Anlass gab) besteht nach Napier hauptsächlich in der Aufdeckung des Wesens der antichristlichen Herrschaft der Päpste (vgl. [10], Bl. A7, recto). Ja, er bewies geradezu, dass der Papst der (große) Antichrist wäre (ebd., p. 41 ff.). Außerdem wäre das jüngste Gericht für die Zeit zwischen 1688 und 1700 zu erwarten (ebd., p. 16). Uns muten solche Erkenntnisse seltsam an, aber noch Isaac Newton beschäftigte sich hundert Jahre später mit ähnlichen Dingen.

Ungeachtet seiner offenkundigen Frömmigkeit stand Napier auch im Ruf eines Hexers, wozu ein (erhalten gebliebener) Vertrag über die Suche nach einem verborgenen Schatz ganz gut passt. Daneben verteidigte er mit Vehemenz, was er als sein Recht ansah, und etliche Streitigkeiten mit Nachbarn, ja auch mit seinen Stiefgeschwistern, sind dokumentiert. In der Bibliothek von Lambeth Palace (London) gibt es ein Manuskript Napiers mit Konstruktionsvorschlägen für Kriegsmaschinen *for the defence of this Iland.*

So treten zwar manche martialische Züge aus dem Quellenmaterial hervor. Dennoch wissen wir nicht, wie Napier im persönlichen Umgang war. War er im Allgemeinen freundlich oder abweisend? War er warmherzig und dabei vielleicht etwas cholerisch veranlagt oder kalt und berechnend? Das ist schwer zu sagen. Fest steht, dass er sein Haus wohlbestellt hinterließ und dass er mit einem kongenialen Mathematiker wie Henry Briggs rasch Freundschaft schloß.

Was kann man aus all dem lernen? Zum einen, dass bedeutende Forscher der Vergangenheit nicht in heutige Klischeevorstellungen von Wissenschaftlern passen. Zum anderen, dass ihre Bedeutung nicht daher rührt, dass sie uns ähnlich, also zumindest im Keim „moderne“ Menschen gewesen wären. Vielmehr haben sie trotz ihres Beharrens in der zeitgenössischen Denkwelt grundlegende „moderne“ Erkenntnisse gewonnen.

Obige biographische Einzelheiten findet man einerseits in [14], der wichtigsten biographischen Quelle — von der Hand eines Nachfahren Napiers; dort ist zum Beispiel auch die oben genannte Widmung aus [13] abgedruckt (p. 170 ff.). Ferner steht vieles davon in [19], im Artikel von Hume Brown im Jubiläumsband [8], sowie in [2]. Der Jubiläumsband enthält freilich manche bereits zu ihrer Zeit historisch unhaltbare Thesen, man vergleiche dazu die Besprechung [7].

Napier verfasste auch noch ein Buch über Rechenkunst und Algebra (De arte logistica, gedruckt erst 1839). Man vergleiche dazu den Artikel von Steggall in [8]. Recht berühmt sind die Rechenstäbchen, die Napier in seiner *Rabdologia* von 1617 beschreibt. Von diesem Werk gibt es eine moderne englische Übersetzung [13].

In vielen neueren Büchern, wie [17] oder [3], hält sich hartnäckig die latinisierte Namensform *Neper* (vgl. dazu die Titelblätter in der Ausgabe [11] von 1620). Unseres Erachtens sollte man sie aufgeben, denn sie entspricht einer Zeit, der Englisch weniger vertraut war als Latein.

10. Ein Fehler in der *Constructio*

Die Überschrift zum trigonometrischen Teil der *Constructio* verspricht mathematische Sätze, die die Lösung der Grundaufgaben am sphärischen Dreieck mit wunderbarer Leichtigkeit (*mira facilitate*) ermöglichen sollen. Insbesondere soll man ohne Aufteilung der Dreiecke in rechtwinklige auskommen (*triangulum sphaericum resolvere absque eiusdem divisione in duo quadrantalia aut rectangula*, vgl. [11], *Constructio*, p. 50). Das wird jedoch auf den ersten drei Seiten dieses Abschnitts *nur formal* eingehalten. De facto wird das Dreieck oft auf solche Weise unterteilt und die Napierschen Regeln angewendet — freilich ohne dass gesagt wird, dass die Hilfsdreiecke rechtwinklig sind. Auch stehen diese Regeln hier noch nicht in systematisierter Gestalt zur Verfügung, d. h., der Autor arbeitet nicht mit zirkulären Stücken, sondern im Grunde mit allen zehn Formeln am rechtwinkligen Dreieck (vgl. Abschnitt 4). Dies alles spricht dafür, dass hier ein Stück aus einer frühen Phase von Napiers Forschungen stehengeblieben ist — Halbwinkelsätze und Analogien machen später solche Aufteilungen tatsächlich unnötig.

Wir besprechen die letzten beiden Beispiele aus diesem Teil (Nr. 11 und 12, p. 52): In Beispiel 11 sind von einem Dreieck ABC die Seite b und die Winkel α und γ gegeben, gesucht ist c (WSW-Fall). Das Dreieck wird wie in Abbildung 6 in zwei rechtwinklige Dreiecke mit gemeinsamer Kathete h zerlegt. Napier berechnet den Winkel α', der zwischen h und b liegt, mittels $\cos b = \cot\gamma \cot\alpha'$ (entspricht Napier-Regel (b)). Sodann erhält er den Winkel $\alpha'' = \alpha - \alpha'$ zwischen h und c. Dieselbe Regel ergibt nun $\cos\alpha' = \cot h \cot b$ und $\cos\alpha'' = \cot h \cot c$. Eliminiert man aus diesen Gleichungen $\cot h$, so folgt mit der Relation $\tan = 1/\cot$ das Ergebnis $\tan c = \cos\alpha' \tan b / \cos\alpha''$.

Dabei berücksichtigt Napier auch noch den Fall, dass h außerhalb des Dreiecks liegt, was gerade $\alpha'' = \alpha + \alpha'$ bedeutet. Er formuliert seinen Lösungsvorschlag wie ein Kochrezept, insbesondere ohne Beweis. Es erscheint jedoch plausibel, dass gerade die vielen Fälle am rechtwinkligen Dreieck, die bei dieser und den meisten der vorhergehenden zehn Aufgaben auftreten, Napier zur Formulierung seiner Regeln veranlassten.

Im nachfolgenden Beispiel 12 ist die Ausgangssituation dieselbe, also b, α und γ sind gegeben. Gesucht ist jedoch der Winkel β. Nach Lösung des Beispiels 11 könnte man β etwa mit dem Sinussatz (17) berechnen. Dieser ist Napier natürlich bekannt (seine Beispiele 3 und 8 bestehen gerade in der Anwendung dieses Satzes). Napier war also wohl klar, dass Beispiel 12 keine große Herausforderung mehr darstellt. Dennoch steht im Text sinngemäß

$$\cos\beta = \cos b / \cot\gamma. \tag{20}$$

Dies ist natürlich falsch, denn dann würde durch die *zwei* Bestimmungsstücke b und γ bereits der SWW-Fall definiert (und α würde gar nicht benötigt). Vorstellbar ist folgendes: Die Lösungsvorschläge zu den Aufgaben 11 und 12 stimmen in den ersten zwei Textzeilen überein. Diese zwei Zeilen führen in Beispiel 11 zum richtigen Zwischenergebnis

$$\cot\alpha' = \cos b / \cot\gamma, \tag{21}$$

in Beispiel 12 aber sofort zum falschen Endergebnis (20). Es liegt die Vermutung nahe, dass Napiers ursprüngliche Lösung etwa gleich lang war wie im Fall der Aufgabe 11, genauer gesagt, dass drei bis vier Zeilen zwischen Zeile zwei und Zeile drei (wo (20) steht) ausgefallen sind. Dem liegt vielleicht ein Versehen des Setzers zugrunde. In den entfallenen Zeilen könnte (sinngemäß) das Folgende gestanden haben:

„Berechne $\alpha'' = \alpha - \alpha'$, ferner h nach der Regel $\cos\alpha' = \cot b \tan h$, schließlich $\cos\beta = \cos h \sin\alpha''$."

Die Zeilen drei und vier (*et proveniet sinus complementi anguli B, et inde ipse angulus B quaesitus.*) würden daran anschließen und könnten so belassen werden, wie sie sind ([11], *Constructio*, p. 52).

Ein Versehen des Setzers ist für uns angesichts der identischen Textanfänge der beiden Beispiele näherliegend als ein derart grober Fehler Napiers, der zur Zeit der Veröffentlichung ja schon tot war. Das Versehen wäre dann beim Zeilenumbruch von *proveniet* passiert, eines Wortes, das zum Schluss der Aufgabe noch ein zweites Mal aufgetreten sein dürfte — so wie im vorausgehenden Beispiel. Vielleicht ist ein solches Versehen auch deshalb nicht aufgefallen, weil dank einer Zusatzbemerkung Napiers das Beispiel 12 rein äußerlich nicht kürzer aussieht als seine Vorgänger.

Warum wohl Henry Briggs, dessen wertvolle Anmerkungen Napiers Text beigegeben sind, das nicht gesehen hat? Möglicherweise hat er diesen Teil nicht so genau gelesen, da er ihm weniger wichtig erschien, denn seine (trigonometrischen) Kommentare beziehen sich ausschließlich auf die nachfolgenden Abschnitte. Oder er hat seinen Kommentar nach einem korrekten Manuskript Napiers verfasst — ein solches gibt es leider nicht mehr. Aber das sind natürlich nur Vermutungen.

Dieser verderbte Text wurde kommentarlos in die englische Übersetzung [12] der *Constructio* aus dem 19. Jahrhundert übernommen. Da die besagte Übersetzung die Erstausgabe von 1619 zur Vorlage hat, kann der Fehler nicht erst beim Setzen des von uns benützten Textes [11] von 1620 passiert sein. Das genannte Werk [12] enthält auch einen guten Katalog der Druckausgaben von Napiers Schriften.

Literatur

[1] Raymond Ayoub, What is Naperian logarithm? American Mathematical Monthly 100 (1993), 351–364.

[2] Margaret E. Baron, John Napier, in: Biographical Dictionary of Mathematicians, Bd. 3, 1774–1778; Scribner, New York, 1991.

[3] Hans-Günther Bigalke, Kugelgeometrie. Salle, Frankfurt u. Sauerländer, Aarau, 1984.

[4] Anton v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Bd. 1, Teubner, Leipzig, 1900; Bd. 2, ebd., 1903.

[5] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik (25. Aufl.). Teubner, Stuttgart, 1991.

[6] Charles M. Edwards, The Historical Development of the Calculus. Springer, New York, 1979.

[7] Louis C. Karpinsky, Napier Tercentenary Memorial Volume (Rezension), Science 44 (1916), 427–430.

[8] Cargill G. Knott (Hrsg.), Napier Tercentenary Memorial Volume. Longmans, Green and Co., London, 1915 (allgemein zugänglich über die digitale Bibliothek der Cornell-University).

[9] R. Moritz, On Napier's fundamental theorem relating to right spherical triangles, American Mathematical Monthly 22 (1915), 220–222.

[10] John Napier, A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John. Walde-Grave, Edinburgh 1593.

[11] John Napier, Logarithmorum canonis descriptio; Tabula canonis logarithmorum; Mirifici logarithmorum canonis constructio. Bartholomée Vincent, Lyon, 1620 (allgemein zugänglich über die digitale Sammlung der Posner Library, Carnegie Mellon University).

[12] John Napier, The construction of the Wonderful Canon of Logarithms (Übers. u. Anm. v. W. R. Macdonald). Blackwood, Edinburgh, 1889; Nachdrucke: Dawson's of Pall Mall, London, 1966; Gryphon, New York, 1997.

[13] John Napier, Rabdology (Übers. v. W. Richardson). MIT Press, Cambridge (Mass.), 1990.

[14] Mark Napier, Memoirs of John Napier of Merchiston. Blackwood, Edinburgh u. Cadell, London, 1834 (Download als Google-Buch).

[15] Johannes Regiomontanus, De triangulis omnimodis libri quinque. Petreius, Nürnberg 1533 (die Basler Ausgabe von 1561 ist allgemein zugänglich über die Wolfenbütteler Digitale Bibliothek).

[16] Ptolemäus, Handbuch der Astronomie I, II (Übers. u. Anm. v. K. Manitius, Vorw. u. Berichtig. v. O. Neugebauer). Teubner, Leipzig, 1962 (Neuausg. d. Ausg. 1912/13).

[17] Rudolf Sigl, Ebene und sphärische Trigonometrie. Akademische Verlagsgesellschaft, Franfurt, 1969.

[18] Pauline Sperry, Short Course in Spherical Trigonometry. Johnson, Richmond, o. J. (1928).

[19] W. R. Thomas, John Napier, Mathematical Gazette 19 (1935), 192–205.

Urs Dietrich und Kurt Girstmair
Institut für Mathematik
Universität Innsbruck
Technikerstr. 13/7
A-6020 Innsbruck, Österreich