

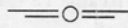
Anleitung

zum

Gebrauche und zur Rektifikation der Polarplanimeter

von

STARKE & KAMMERER in WIEN.



Beschreibung. Die Hauptbestandteile des in Fig. 1 dargestellten Polarplanimeters (Katalog Nr. 512), welches zur mechanischen Bestimmung des Flächeninhaltes beliebig begrenzter Figuren dient, sind die folgenden:

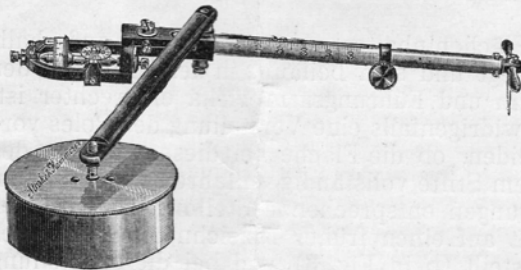


Fig. 1.

1. Der Pol, bestehend aus einem mit Blei ausgegossenen Messingzylinder, welcher durch sein größeres Gewicht bei der Operation der Flächenbestimmung eine fixe Lage auf der Unterlage erhält.

2. Der Leitarm, gebildet durch eine Messingstange, welche mittelst eines Kugelgelenkes in den Pol eingelagert und um den Mittelpunkt desselben frei beweglich ist.

3. Der Fahrarm, welcher mit dem Leitarme durch eine vertikale Achse verbunden ist und um diese gedreht werden kann. Die Länge dieses Fahrarmes kann innerhalb bestimmter Grenzen beliebig verändert werden, indem derselbe aus zwei ineinander verschiebbaren Messingröhren besteht, welche nach der Einstellung des Armes auf eine gewünschte Länge durch eine Klemmschraube fest miteinander verbunden werden können. Zur Charakterisierung der jeweiligen Länge dieses Armes ist der fixe Teil desselben mit einer Millimeterteilung versehen, während der verschiebbare Teil einen Index trägt, dessen Stellung an der Teilung abgelesen wird, wobei eine Schätzung bis auf Zehntel-Millimeter möglich ist.

4. Der Fahrstift, welcher mit dem freien Ende des verschiebbaren Teiles des Fahrarmes in fester Verbindung steht; derselbe dient zur Umfahrung des Umfanges der zu planimetrierenden Fläche.

5. Die Rolle; diese ist um eine mit dem festen Teile des Fahrarmes verbundene Achse drehbar und wird bei der Flächenbestimmung auf die Unterlage aufgelegt. Bewegt sich der Stift längs des Umfanges einer Figur, so wird die Rolle durch die zwischen ihr und der Unterlage auftretende Reibung in Drehung versetzt und die Anzahl ihrer Umdrehungen dient als Maß für den Flächeninhalt der umfahrenen Figur.

6. Das Zählwerk, dessen Aufgabe es ist, die Umdrehungen der Rolle zu zählen und die Angabe derselben zu ermöglichen. Es besteht aus einer mit der Rolle verbundenen Trommel *T* (Fig. 2), deren Umfang in 100 Teile geteilt ist. An dem Index *i* können daher die Zehntel und Hundertstel einer Rollenumdrehung direkt, die Tausendstel derselben hingegen durch Schätzung bestimmt werden. Zur Zählung der ganzen Umdrehungen der Rolle ist das Zähscheibchen *Z* vorgesehen, welches an der oberen Fläche in 20 Teile geteilt ist und durch ein unterhalb derselben angebrachtes Zahnradchen mit einer in die Achse eingeschnittenen Schraube ohne Ende in Verbindung steht. Bei jeder Umdrehung der Rolle bewegt sich diese Zähscheibe um einen Teilstrich weiter, so daß der mit dem Rahmen verbundene Index *I* die Ablesung der ganzen Umdrehungen ermöglicht. Wie aus der Figur ersichtlich, ist jeder 5. Strich beziffert, wodurch die Richtung der Zählung angegeben und auch die Ablesung des Standes bedeutend erleichtert ist.

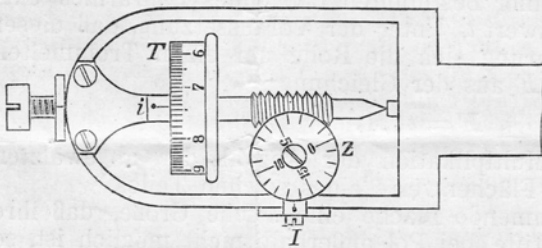


Fig. 2.

Fig. 2 erläutert die Ausführung einer Ablesung. Der Index *I* steht zwischen dem 13. und 14. Strich des Zähscheibchens *Z*; es sind mithin 13 ganze Umdrehungen der Rolle von ihrem Nullpunkte gemacht worden. Jener Bruchteil einer Umdrehung, welcher dem Abstände des Index *I* von dem 13. Teilstrich entspricht, wird nun an der Trommel *T* mit Hilfe des Index *i* bestimmt. Der Index *i* liegt in der Figur zwischen den mit 7 und 8 bezeichneten Teilstrichen, welche die Zehntel einer Umdrehung bezeichnen, u. zw. um 4 ganze Trommelteile weiter als der Teilstrich 7; daher heißt die direkte Ablesung 13·74 ganze Umdrehungen. Der Abstand

des Indexstriches *i* von dem vorhergehenden der obigen Anzahl von Umdrehungen entsprechenden Teilstriche kann noch in Zehntel eines Trommelteiles, also in Tausendstel von Umdrehungen geschätzt werden; ist das Resultat dieser Schätzung in dem vorliegenden Falle 6 Zehntel Trommelteile, so heißt die ganze Ablesung, welche den Stand der Rolle charakterisiert, 13·746 Rollenumdrehungen. Behufs einfacherer Rechnung ist jedoch dieser Stand nicht in Rollenumdrehungen, sondern immer in Trommelteilen auszudrücken. Da einer Umdrehung 100 Trommelteile entsprechen, so ist die Ablesung bei dem dargestellten Stande der Rolle: 1374·6 Trommelteile.

Das Instrument ist ferner so eingerichtet, daß sich die Rolle samt dem Zählwerke bei feststehendem Pole durch eine Bewegung des Fahrstiftes unterhalb des Leitarmes hindurchführen läßt, was den Zweck hat, eine eventuelle unrichtige Stellung der Rollenachse durch eine besondere Art des Gebrauches zu eliminieren. Man nennt die Operation dieses Durchführens das Durchschlagen des Fahrarmes und bezeichnet die Stellungen des Instrumentes mit Fahrarm rechts oder Fahrarm links, je nachdem der Fahrarm sich auf der rechten oder linken Seite des Poles befindet.

Theorie. Bezüglich der Theorie des Instrumentes und der Bestimmung seiner Konstanten sei auf die folgenden Werke und Abhandlungen verwiesen:

Hartner-Doležal, Hand- und Lehrbuch der niederen Geodäsie, I. Bd., S. 261 ff.

Schell: »Allgemeine Theorie des Polarplanimeters« in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, 1868.

Schell: »Über die Bestimmung der Konstanten des Polarplanimeters«, in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, 1867.

Kajaba: »Ein Beitrag zur Theorie der in der Praxis hauptsächlich verwendeten Polarplanimeter«, in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, 1882.

Gebrauch. Handelt es sich um die Bestimmung eines Flächeninhaltes, so wird der Pol außerhalb dieser Fläche so aufgestellt, daß er dem Beobachter gegenüber liegt und sich beiläufig in der Mittellinie der Figur befindet und nachgesehen, ob der Winkel zwischen Leitarm und Führungsarm zirka ein rechter ist, wenn sich der Fahrstift in dem Mittelpunkte der Figur befindet, widrigenfalls eine Verstellung des Poles vorgenommen werden müßte. Gleichzeitig kann man dabei entscheiden, ob die Fläche bei dieser Stellung des Instrumentes, welche man als Pol außerhalb bezeichnet, mit dem Stifte vollständig umfahren werden kann.

Ist dies der Fall und hat der Pol die den obigen Bedingungen entsprechende Stellung, so wird der Fahrarm auf die rechte Seite des Poles gebracht, der Fahrstift auf einen früher bezeichneten Punkt des

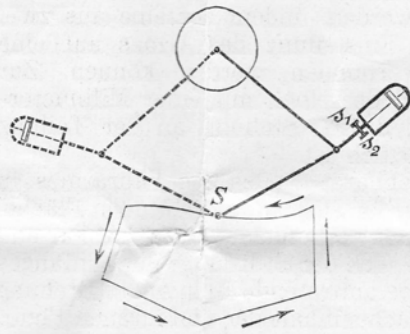


Fig. 3.

Umfanges der Figur eingestellt (S in Fig. 3) und bei dieser Stellung die Ablesung A_1 an dem Zählwerke des Instrumentes gemacht. Umfährt man hierauf die Figur in der durch die Pfeile angegebenen Richtung und macht man an dem Zählwerke die Ablesung A_2 , sobald der Fahrstift wieder in dem Anfangspunkte S angelangt ist, so ist durch die Differenz beider Ablesungen die Anzahl von Trommelteilen bestimmt, welche dem Flächeninhalte der umfahrenen Figur entsprechen. Erwähnt sei ausdrücklich, daß bei Einhaltung des angegebenen Umfahrungs-sinnes immer die erste Lesung von der zweiten abgezogen werden muß; ergibt sich daher als zweite Ablesung ein Wert, welcher numerisch kleiner ist als die Anfangsablesung, so hat der Nullpunkt des Zählscheibchens den Index passiert und ist daher die zweite Lesung vor Ausführung der Subtraktion um 2000 zu vermehren. Um den Einfluß einer fehlerhaften Stellung der Rollenachse zu eliminieren, führt man hierauf die Rolle bei unveränderter Stellung des Poles unter dem Leitarme hindurch, wodurch der Fahrarm auf die linke Seite des Poles kommt. Hierauf wird der Fahrstift wieder auf den markierten Punkt S des Umfangs eingestellt, die Anfangsablesung A'_1 gemacht, die Figur in demselben Sinne wie früher umfahren und die Ablesung A'_2 notiert, wenn der Stift auf den Punkt S zurückgekommen ist. Die Differenz der beiden Lesungen ergibt wieder die Anzahl der bei der Umfahrung der Figur abgewälzten Trommelteile. Auch in dieser Stellung ist stets die erste Lesung von der zweiten zu subtrahieren, weshalb auch hier die früher gemachte Bemerkung Giltigkeit besitzt. Ist $A_r = A_2 - A_1$ die erste, $A_l = A'_2 - A'_1$ die zweite Ablesungsdifferenz, so ist das arithmetische Mittel beider frei von der sogenannten Rollenschiefe und der Ausdruck $A = \frac{A_r + A_l}{2}$ daher diejenige Anzahl von Trommelteilen, welche der umfahrenen Fläche bei richtiger Rollenstellung zukommt. Bei einer bestimmten Länge des Fahrarmes entspricht nun einem Trommelteile ein ganz bestimmter Flächenwert t . Unter der Voraussetzung, daß dieser Wert eines Trommelteiles, d. h. die Fläche, bei deren Umfahrung sich die Rolle um einen Trommelteil abwälzt, bekannt ist, erhält man die zu bestimmende Fläche F aus der Gleichung

$$F = t \cdot A,$$

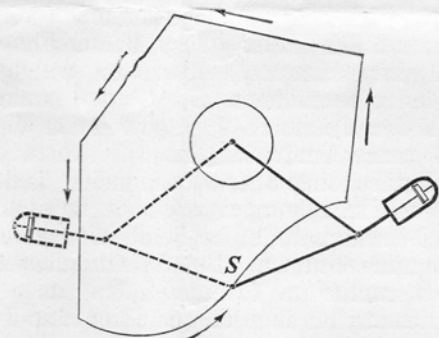


Fig. 4.

also durch einfache Multiplikation der Anzahl der abgewälzten Trommelteile mit dem Flächenwerte eines solchen Teiles.

Hat die zu bestimmende Fläche eine solche Größe, daß ihre Umfahung mit dem Stifte bei Pol außerhalb nicht möglich ist, so muß der Pol in die Figur gestellt werden, u. zw. so, daß er beiläufig mit ihrem Mittelpunkte zusammenfällt. Der Fahrstift wird wieder bei Fahrarm rechts auf einen markierten Punkt S des Umfangs eingestellt (Fig. 4), der Stand A_1 der Trommel abgelesen, die Figur mit dem Fahrstifte in der Richtung der Pfeile umfahren und nach dieser Umfahung die Ablesung A_2 gemacht. Die Differenz $A_r = A_2 - A_1$ entspricht abermals der Anzahl der abgewälzten Trommelteile. Während bei Pol außerhalb diese Differenz stets positiv ist, kann

dieselbe bei Pol innerhalb positiv oder negativ sein, je nachdem die erste oder die zweite Ablesung die größere ist, d. h. das Zähler Scheibchen sich gegen den Index so bewegt hat, daß die Ablesung an diesem Index bei der Umfahrung größer oder kleiner wurde. Um Irrtümer zu vermeiden, hat man daher bei der Umfahrung der Figur den Drehungssinn dieses Scheibchens festzustellen, was am einfachsten geschieht, indem man in einigen, nahezu gleich weit von einander entfernten Punkten des Umfanges den Stift durch Druck fixiert und die Ablesung an dem Zähler Scheibchen ausführt. Aus der Reihenfolge der abgelesenen Ziffer kann auf den Drehungssinn des Scheibchens geschlossen werden. Diese Feststellung des Drehungssinnes ist nämlich für den Fall wichtig, daß der Nullpunkt des Scheibchens den Index passiert, da dann entweder zu der ersten oder aber zur zweiten Ablesung 2000 addiert werden muß, was in folgender Weise entschieden wird. Es findet eine Vermehrung der zweiten Ablesung statt, wenn das Zähler Scheibchen sich so gedreht hat, daß die Ablesungen an dem Index größer wurden, während die Zahl 2000 zur ersten Ablesung addiert wird, wenn das Scheibchen sich im entgegengesetzten Sinne bewegte.

Beispiel: I. Fall: Die Ablesungen sind: $A_1 = 927.7$, $A_2 = 1448.2$; an drei Punkten des Umfanges ergaben sich am Zähler Scheibchen die Lesungen 10, 12, 13. Aus den letzteren ist ersichtlich, daß der Nullpunkt nicht den Index passierte, so daß man die Lesungen unverändert zu subtrahieren hat und erhält: $A_r = A_2 - A_1 = +520.5$ Trommelteile.

II. Fall: Bei Umfahrung derselben Fläche wurde erhalten: $A_1 = 1781.6$, $A_2 = 302.1$ und für die Bewegung des Zähler Scheibchens wurde notiert: 18, 19, 1. Der Nullpunkt hat den Index in positiver Richtung überschritten, weshalb 2000 zur zweiten Ablesung zu addieren ist. Es ergibt sich mithin $A_r = (A_2 + 2000) - A_1 = +520.5$ Trommelteile.

III. Fall: Für eine andere Fläche wurde gefunden: $A_1 = 1386.8$, $A_2 = 192.1$ und am Zähler Scheibchen in drei Zwischenpunkten abgelesen 9, 6, 3. Die Drehung des Scheibchens war daher negativ, der Nullpunkt passierte den Index nicht, weshalb die Subtraktion unmittelbar ausgeführt werden kann; es ist $A_r = A_2 - A_1 = -1194.7$ Trommelteile.

IV. Fall: Bei einer anderen Polstellung und Umfahrung derselben Fläche ergab sich: $A_1 = 924.5$, $A_2 = 1729.8$ und an dem Index der Zähler Scheibe 5, 3, 19. Schlußfolgerung: Der Nullpunkt des Zähler Scheibchens hat den Index in negativer Richtung passiert, es muß mithin die erste Ablesung vor der Subtraktion um 2000 vergrößert werden, und das Resultat ist $A_r = A_2 - (A_1 + 2000) = -1194.7$ Trommelteile.

Bei Beachtung dieser vier Beispiele, welche alle möglichen Fälle enthalten, ist jeder Irrtum bei der Bestimmung der Differenz ausgeschlossen.

Aus demselben Grunde wie bei Pol außerhalb wird die Anzahl A_i der Trommelteile bei unveränderter Polstellung in der zweiten Lage des Instrumentes (Fahrarm links) ermittelt; bei der Bildung der Ablesungsdifferenz ist dieselbe Überlegung wie früher auszuführen und der richtige Wert der abgewälzten Trommelteile wie bei Pol außerhalb durch das arithmetische Mittel aus den beiden Ablesungsdifferenzen bestimmt. Es ist mithin $A = \frac{A_r + A_l}{2}$; da A_r und A_l in beiden Lagen des Fahrarmes das gleiche Zeichen erhalten, ist die halbe Summe ihrer numerischen Werte mit dem Zeichen zu versehen, welches ihnen beiden gemeinsam ist. A wird daher positiv, wenn A_r und A_l positiv sind, dagegen negativ, wenn beide ein negatives Zeichen haben.

Die Fläche F der umfahrenen Figur ist dann bei der Lage des Poles im Innern der Figur durch die Gleichung

$$F = t \cdot (K + A)$$

gegeben, wenn K eine von der Länge des Fahrarmes abhängige Konstante und t wie früher den Flächenwert eines Trommelteiles der Rolle bezeichnet. Die Konstante K , welche den Namen absolute Konstante des Planimeters führt, bedeutet den Flächeninhalt jenes Kreises, welchen der Fahrstift bei seiner Bewegung beschreibt, sobald die Ebene der Rolle durch den Pol hindurchgeht, die Rolle also bei der Beschreibung dieses Kreises mit dem Fahrstifte keine Abwälzung erleidet (Fig. 5). Die Anzahl der Trommelteile ist mit jenem Zeichen in die obige Gleichung einzuführen, welches sich bei der Bildung der Ablesungsdifferenz ergibt, so daß der zweite Teil des Ausdruckes für F sowohl positiv als auch negativ werden kann. Der Flächenwert eines Trommelteiles hat bei Pol außerhalb denselben numerischen Wert wie bei Pol innerhalb bei der gleichen Länge des Fahrarmes.

Der in dem Kasten des Instrumentes angebrachte Zettel enthält für die gebräuchlichsten Verjüngungsverhältnisse der Praxis jene Werte, auf welche der Index des verschiebbaren Teiles des Fahrarmes einzustellen ist, damit die Auswertung der Fläche in möglichst einfacher Weise vorgenommen werden kann. Gleichzeitig sind in dieser Tabelle auch die Größen der Konstanten K sowie der Flächenwert eines Trommelteiles für die betreffende Einstellung angegeben. Das Resultat der Flächenbestimmung erscheint immer in jener Maßeinheit, in welcher

der Wert eines Trommelteiles angegeben ist und bezieht sich bei den Verjüngungsverhältnissen auf die Fläche in der Natur.

Um die Einstellung des Fahrarmes für irgend ein in der Tabelle nicht enthaltenes Verjüngungsverhältnis zu bestimmen, ist dem Instrumente ein sogenanntes Kontrollineal beigegeben. Wird dasselbe mit der an seiner unteren Seite angebrachten Spitze in ein gut aufgespanntes Reißbrett eingedrückt und der Fahrstift des Planimeters in die an der oberen Seite angebrachte Vertiefung eingesetzt, so beschreibt der Fahrstift bei der Drehung des Lineals einen Kreis, dessen Flächeninhalt auf dem Kontrollineale in cm^2 angegeben ist. Um bei dieser Bewegung wieder in die Anfangslage zurückkehren zu können, ist auf der

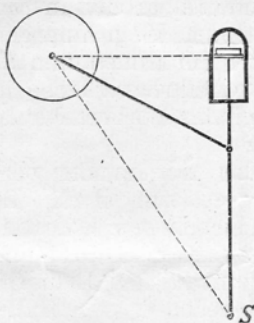


Fig. 5.

abgeschrägten Kante des Lineals ein Strich angebracht, dessen Lage vor dem Beginne der Drehung auf dem Papiere bezeichnet werden kann. Ist der Wert dieser Fläche F_0 und soll die Einstellung für das Verhältnis $1:n$ gefunden werden, so entspricht dieser Kreisfläche in der Natur eine Fläche $F_0 n^2$. Wenn der Wert eines Trommelteiles einen bestimmten, zwischen den Grenzen $\frac{F_0 n^2}{83}$ und $\frac{F_0 n^2}{115}$ zu wählenden Wert t_0 (z. B. $1 a$, $1 ha$ u. s. w.) erhalten soll, so ergibt die Gleichung $F_0 n^2 = t_0 A_0$ diejenige Anzahl A_0 von Trommelteilen, welche bei der Bewegung des Fahrstiftes längs des Kreisumfanges abgewälzt werden sollen. Man kann daher durch wiederholte Versuche jene Einstellung des Fahrarmes finden, bei welcher bei Pol außerhalb das Mittel aus den Ablesungsdifferenzen bei Fahrarm rechts und Fahrarm links dem aus der obigen Gleichung berechneten Werte A_0 entspricht. (Durch Verkürzung des Fahrarmes kann die Ablesungsdifferenz vergrößert werden.) Hat man diese Einstellung erhalten und durch Wiederholung der Umfahrung kontrolliert, so bestimmt man den Flächeninhalt einer beliebigen größeren Figur bei Pol außerhalb mit aller Genauigkeit, bringt dann den Pol in die Figur hinein und bestimmt nach dem Vorhergehenden die Anzahl von Trommelteilen, welche bei Umfahrung dieser Figur abgewälzt werden. Da auch der Flächeninhalt der Figur und der Wert eines Trommelteiles bekannt sind, ist man dann auch imstande, die Größe der Konstanten K für die gefundene Einstellung aus der Gleichung für Pol innerhalb zu berechnen.

Bemerkt sei noch, daß es sich bei der Bestimmung des Flächeninhaltes einer größeren Figur empfiehlt, dieselbe in kleinere Teile zu zerlegen und den Flächeninhalt jedes Teiles bei Pol außerhalb zu ermitteln, da die bei Pol innerhalb erhaltenen Resultate stets einen geringeren Genauigkeitsgrad besitzen.

Rektifikation. Die Rollenachse soll parallel mit der Verbindungslinie des Fahrarmdrehpunktes und der Spitze des Fahrstiftes sein; ist dies nicht der Fall und z. B. die Rollenachse bei der Stellung Fahrarm rechts größer als bei Fahrarm links, so ist das Schraubchen s_1 zu lüften und s_2 anzuziehen (Fig. 3). Im entgegengesetzten Fall wird durch Lüften von s_2 und Anziehen von s_1 die Gleichheit der Angaben bis auf 0.2 Trommelteile durch wiederholte Versuche und mit Hilfe des Kontrolllineals erreicht.

Das Instrument wird vor der Ablieferung in bezug auf diese Eigenschaft genauestens geprüft und richtig gestellt; eine spätere Untersuchung und Berichtigung ist unnötig, wenn bei der Bestimmung eines Flächeninhaltes immer der angegebene Vorgang der Umfahrung in beiden Lagen des Fahrarmes eingehalten wird, da durch denselben der Einfluß eines eventuellen Instrumentalfehlers vollkommen eliminiert wird.

Genauigkeit. Da die Ablesungen an dem Zählwerke des Instrumentes bis auf 0.1 eines Trommelteiles ausgeführt werden können, die Anzahl der einer umfahrenen Fläche zugeordneten Trommelteile mithin ebenfalls mit dieser Genauigkeit erhalten wird, ist ein mit dem Instrumente bestimmter Flächeninhalt mit einem Fehler behaftet, welcher dem zehnten Teile des Flächenwertes t eines Trommelteiles entspricht. Ist z. B. $t = 1 \text{ cm}^2$, so ist der Fehler der mit dem Instrumente bestimmten Flächen 0.1 cm^2 . Allerdings ist bei dieser Genauigkeitsangabe ein vollkommen genaues Umfahren des Umfanges der Figur vorausgesetzt. Der durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler verursachte wahrscheinlichste Wert des Fehlers der Fläche ist jedoch bei einiger Übung nicht größer als $0.3 t$.

Polarplanimeter nur für cm^2 (Katalog Nr. 513).

Dieses Instrument unterscheidet sich bezüglich seiner Einrichtung von dem ersteren dadurch, daß der Fahrarm keine Teilung trägt, sondern die beiden Teile desselben durch eine Schraube so miteinander fix verbunden sind, daß der Flächenwert t eines Trommelteiles 1 cm^2 beträgt. Umfährt man daher mit dem Fahrstifte dieses Instrumentes eine Fläche in der angegebenen Art und Weise bei Fahrarm rechts und Fahrarm links, so ist das arithmetische Mittel der beiden Ablesungsdifferenzen unmittelbar der in cm^2 angegebene Wert der umfahrenen Fläche, sobald sich der Pol außerhalb der Figur befindet. Liegt hingegen der Pol im Innern derselben, so hat man dieses arithmetische Mittel mit seinem Zeichen zur Konstanten K , welche auf dem Kastenzettel verzeichnet ist, hinzuzufügen, wodurch man sofort die umfahrene Fläche in cm^2 erhält. Bezüglich des Gebrauches, der Rektifikation und der Genauigkeit kann auf das Vorhergehende verwiesen werden.

Obwohl die beiden Teile des Fahrarmes vor der Ablieferung in solcher Weise miteinander verbunden werden, daß der Flächenwert eines Trommelteiles 1 cm^2 beträgt, empfiehlt es sich doch, die richtige Länge des Fahrarmes zeitweilig zu kontrollieren. Dies geschieht mit dem beigegebenen Kontrolllineale, indem man feststellt, ob das arithmetische Mittel der Ablesungsdifferenzen bei Fahrarm rechts und Fahrarm links der Anzahl der auf dem Lineale angegebenen cm^2 entspricht, wenn man den Fahrstift in den Körner des Lineals einsetzt und durch Bewegung des Stiftes jenen Kreis beschreibt, dessen Halbmesser der Abstand des Körners von dem Drehungspunkte des Lineals ist. Ergibt sich dabei eine Differenz, so ist die Verbindungsschraube der beiden Teile des Fahrarmes zu lüften und durch wiederholte Versuche derjenige Abstand des Fahrstiftes von dem Drehungspunkte des Fahrarmes zu ermitteln, bei welcher die oben erwähnte Gleichheit der Ablesungsdifferenz mit der Anzahl der die Kreisfläche bestimmenden cm^2 stattfindet. Es ist hierbei wieder zu beachten, daß die Ablesungsdifferenz größer wird, wenn man den Fahrarm kürzer stellt. Bei jeder neuen Länge des Fahrarmes muß die Verbindungsschraube der beiden Fahrarmteile vor der Untersuchung fest angezogen werden.