Prinzipien und Konstrukteure nichtintegrierender Planimeter, ein historischer Überblick Stefan Drechsler, Hamburg Barbara Haeberlin, Hamburg

Einleitung

In der Geschichte der Planimeter herrscht Einigkeit darüber, dass deren Ursprünge zwischen dem Herrmann'schen Koordinatenplanimeter und dem Amsler'schen Polarplanimeter in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts anzusiedeln sind.

Betrachtet man neben diesen integrierenden Planimetern auch solche Flächenbestimmungsgeräte, die zur Erklärung ihrer Funktionsweise nicht der Integralrechnung bedürfen, so stößt man auf eine Vielzahl weiterer, wenig bekannter Erfinder und auf Instrumente mit überraschend unterschiedlichen Funktionsprinzipien.

Es ist ja bekannt, dass der Mathematikerfürst Gauß zu jener Zeit an der Landesvermessung teilnahm. Der Umfang der Aufgaben dabei verlangte jedoch eine Vielzahl von Feldmessern auch mit weit geringeren Mathematikkenntnissen. Deren Not, schnell viele Flächeninhalte auf ihren zuvor erstellten Lageplänen ermitteln zu müssen, machte sie erfinderisch.

1 Die Parzellarvermessung der Welt

Die aus dem Gleichheitsgrundsatz der Französischen Revolution resultierende Forderung nach Steuergerechtigkeit wirkte von Frankreich ausgehend im Lauf des neunzehnten Jahrhunderts auch auf die anderen europäischen Staaten.

Nachdem Frankreich im Jahr 1808 das Anlegen eines Parzellarkatasters angeordnet hatte, wurde im selben Jahr in Bayern die Unmittelbare Steuervermessungskommission mit dem Ziel der Erstellung eines Grundsteuerkatasters eingerichtet.

Als die linksrheinischen Gebiete nach dem Wiener Kongress als Rheinprovinz an Preußen gelangt waren, wurden die unter französischer Herrschaft dort begonnenen Vermessungsarbeiten fortgeführt und später auf Westphalen erweitert.

In Österreich legte 1817 das "Grundsteuerpatent" rechtliche und verwaltungstechnische Grundlagen für die Erstellung eines Katasters in der Vielvölker-Monarchie.

All diese Unternehmungen waren staatliche Großprojekte, im Rahmen derer für die personalintensive Vermessung und Berechnung von Grundstücken eine Schar von Feldmessern und Geometern ausgebildet wurde, deren Routinetätigkeit im Winter die Berechnung der Parzellenflächen auf Grundlage der im Sommer erstellten Lagepläne war.

Wie groß dabei der Bedarf nach arbeitserleichternden Methoden und Gerätschaften war, lesen wir z.B. bei dem Lemberger Mathematikprofessor Ignaz Lemoch: "Beim k. k. Kataster berechnet jedes der zehn Inspektorate während eines Winters im Mittel 150.000 Parzellen, dabei kann man annehmen, daß im Durchschnitte jede Parzelle bei der Ausmittlung ihres Flächeninhaltes in 4 bis 5 Figuren zerlegt werden muß; erspart man also durch irgend ein

Verfahren während der Berechnung einer Figur nur eine Sekunde Zeit, so ist der Gewinn bei zehn Inspektoraten schon sehr bedeutend" [Lemo1849].

Der königlich bayerische Trigonometer Johann Georg Zobel verspricht bei Verwendung seines Planimeters sogar ganz konkrete Kostenersparnis: "... da die Berechnungskosten, welche bis jetzt für die Quadrat-Meile auf 300 Gulden sich beliefen, und für die ganze Fläche des Königreichs die Summe von 480.000 Gulden erreicht haben würden, bei den noch zu berechnenden $\frac{4}{5}$ Theilen wenigstens um 200.000 Gulden vermindert werden" [Zobe1815].

Wenn man dann noch bedenkt, dass diese ermüdende Arbeit oft im Akkord bezahlt wurde – der Hannoversche Ober-Commissair Oldendorp berichtet davon [Olde1879] – verwundert nicht, dass etliche Erfinder von Methoden und Geräten zur Flächenberechnung aus den Reihen der Katasterangestellten selbst kommen.

2 Prinzipien der Flächenmessung

2.1 Netzplanimeter

Eines der intuitivsten und naheliegendsten Verfahren, den Flächeninhalt eines Gebietes abzuschätzen, ist es, das Gebiet in Elementarflächen fester Größe aufzuteilen und diese Einheitsflächen einfach zu zählen.

Hulsius beschreibt bereits 1604 in seinem "Ersten Traktat der mechanischen Instrumenten" im Abschnitt "Wie man Aream mit der Ramen ungefähr erfahren soll" einen mit Saiten bespannten Rahmen:

"Lasse dir ein höltzerne oder messinge Ramen machen / ungefähr 10. oder 12. Zoll lang / und 6. oder 8. breit / so etwan ½ Zoll in der Vierung an allen Seiten breit ist / davon theile jeder Seite in so viel Theil alß du wollest gevierd oder länglich / und ziehe solche gevierdte Ramen mit Seiten oder Faden ein / daß es Gegittert sey / nicht anderst alß ein Racketen deß BallenSpiels" [Huls1604].

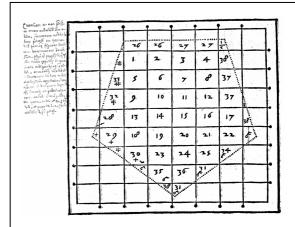


Abbildung 1: Das Netzplanimeter von Hulsius [Huls1604]

Die handschriftliche Randbemerkung im Exemplar der Bibliothek des Deutschen Museums verweist auf Euklid und Clavius und empfiehlt klassische Methoden der Flächenumwandlung.

Das Gerät wird auf die zu vermessende Fläche aufgelegt, und die Anzahl der in die Fläche fallenden Quadrate zusammen mit einem geeignet gewichteten Anteil der von Grenzlinien durchschnittenen Quadrate gibt, wie Hulsius lakonisch formuliert, "ungefähr den gantzen Inhalt"

Ähnliche Geräte werden in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts mehrfach beschrieben [Schm1906].

Hunäus nennt Hogrewe als Erfinder des Glasplanimeters, einer Platte aus Glas oder dünnem Horn, auf die ein Netz von kleinen Quadraten aufgetragen ist, bescheinigt ihm aber, dass "die so bestimmte Flächengröße keinen Anspruch auf große Genauigkeit machen kann, daher man sich dieses Planimeters auch nur für untergeordnete planimetrische Aufgaben bedienen wird" [Hunä1864].

Dieses Urteil scheint ein bisschen hart gewesen zu sein. Willers berichtet in seiner Dissertation, dass noch 1905 die Vermessung des asiatischen Russland durch Juli Michailowitsch Schokalski mithilfe eines Netzplanimeters mit Millimeterquadraten durchgeführt wurde [Will1911].

Andererseits ging im darauffolgenden Jahr vom Russischen Reich eine Bestellung von mehreren tausend Polarplanimetern an die Firma Ott in Kempten [Fisc1995, S. 146]. Ob diese Abfolge nur chronologisch oder auch kausal war, sei dahingestellt.

In Glas geätzt oder, billiger noch, auf Zelluloid gedruckt, wurden derartige Netzplanimeter schließlich zum Dutzendartikel.

2.2 Streifenplanimeter

Der fehlerträchtige Aufwand, Quadrate zu zählen, wird gemindert, indem man die zu berechnende Fläche in Streifen gleicher Breite zerlegt, deren Längen addiert und aus der Gesamtlänge und der Streifenbreite die Fläche ermittelt.

Die einfachste Umsetzung dieses Prinzips ist das sogenannte Harfen- oder Haarplanimeter, bei dem ein rechteckiger Rahmen mit parallelen Fäden äquidistant bespannt ist. Das Gerät wird auf die zu berechnende Fläche gelegt, und die Längen der Saitenabschnitte, die im zu vermessenden Gebiet zu liegen kommen, werden, z.B. mittels eines Zirkels, abgenommen und anschließend addiert.

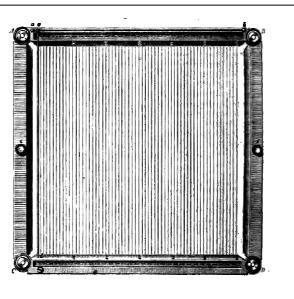


Abbildung 2: Das Harfenplanimeter von Oldendorp [Hunä1864]

Um das Ausmessen und Aufaddieren der Längen, also den fehleranfälligen Teil der Arbeit, zu erleichtern, wurden unterschiedlich aufwendige Ansätze verfolgt.

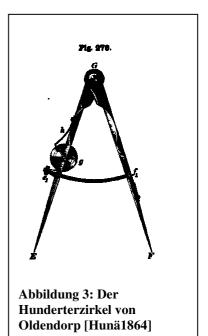
2.2.1 Die Planimeter von Oldendorp und Alder

Der Beamte Eduard Oldendorp wird immer wieder als Erfinder des Harfenplanimeters genannt. Sein Gerät, das aus dem Jahr 1825 stammt, besteht aus einem mit Fäden bespannten Rahmen. Dieser wird auf die Landkarte mit dem zu vermessenden Gebiet gelegt und teilt dieses dann in Streifen identischer Breite. Die Summe der Längen dieser Streifen multipliziert mit der Streifenbreite ergibt also mehr oder weniger genau das Maß der zu berechnenden Fläche. Um das Aufaddieren zu erleichtern, verwendete Oldendorp einen Hunderterzirkel, wie er z.B. bei Lemoch beschrieben ist [Lemo1849, S. 57].

Der Hunderterzirkel macht sich zunutze, dass es reicht, die Summe der Längen der Streifen zu kennen, während die Länge eines einzelnen Streifens nicht weiter von Interesse ist. Er hat eine einstellbare maximale Öffnungsweite, die in der Regel 100 Längeneinheiten entspricht.

Um nun die Länge zu ermitteln, wird zunächst die Länge des ersten Streifens abgenommen, dann der geöffnete Zirkel an den Anfang des zweiten Streifens angesetzt und zusätzlich um dessen Länge geöffnet, und so weiter. Ist der maximale Öffnungswinkel und damit eine Länge von 100 Einheiten erreicht, so wird der Zirkel geschlossen und an der aktuellen Stelle wieder bei Null begonnen. Ein Zählrad zählt dabei die Anzahl der Hunderter mit [Baue1853], [Trun1865], [Hunä1864].

Favaro spricht dem Oldendorpschen Gerät geringe Genauigkeit und einen unverhältnismäßig hohen Zeitbedarf zu [Fava1873].



Die recht naheliegende Konstruktion eines Harfenplanimeters zusammen mit einem Hunderterzirkel wurde nicht nur von Oldendorp propagiert.

In Österreich war es der Inspektor bei der k. k. Katastralvermessung Alder, der denselben Vorschlag machte. Zusätzlich kombinierte er sein Gerät mit einem hölzernen rechtwinkligen Dreieck, das so wie die im folgenden Abschnitt beschriebenen Planimeter von Posener und Netto verwendet wurde [Lemo1849, S.66ff].

Deutlich später, im Jahr 1910, beantragte R. A. de Wal aus Maastricht Gebrauchsmusterschutz (D.R.G.M.: 343423) auf seinen Planimeterschieber, der statt des Hunderterzirkels zum Addieren der Strecken beim Harfenplanimeter verwendet werden sollte.

Das Gerät ist ein addierender Rechenschieber mit einer neben dem Gerät auf der Unterlage zu liegen kommenden Indexplatte zum direkten Abgreifen der Streifenlängen [DeWa1910].

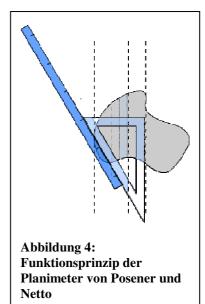
2.2.2 Die Planimeter von Posener und Netto

Auch die folgende, deutlich einfachere, Konstruktion wurde ungefähr zeitgleich in Preußen und in Österreich entwickelt.

Die vom österreichischen Geometer Johann Paul Posener 1823 für die Bedürfnisse des k. k. Katasters entwickelte Variante [Lemo1849], wurde noch in den sechziger Jahren des neunzehnten Jahrhunderts dort verwendet [NVBr1863, S. 55].

Im Prinzip handelt es sich dabei lediglich um eine Vorrichtung zum Erzeugen paralleler Linien mittels eines Dreiecks und eines Lineals mit äquidistanter Skala. Die zu berechnende Figur wird dabei in Streifen gleicher Breite geteilt, deren Längen addiert werden.

Dazu wird zunächst das Lineal mit dem Dreieck so an die zu vermessende Figur angelegt, dass die Hypotenuse des



Dreiecks am Lineal anliegt, die längere Kathete senkrecht das Gebiet berührt und die obere Hypotenusenecke mit dem ersten Teilstrich des Lineals zusammenfällt.

Wird das Dreieck nun bei festgehaltenem Lineal von einem Teilstrich zum nächsten geschoben, so teilt die längere Kathete das Gebiet in äquidistante Streifen, von denen nur noch, zum Beispiel mittels des schon beschriebenen Hunderterzirkels, die Längen addiert werden müssen.

Das Dreieck ist so konstruiert, dass die kürzere Kathete des Dreiecks und die Hypotenuse das Verhältnis l:n zueinander haben. Liegen nun die Teilstriche des Lineals im Abstand k, so entstehen Streifen der Breite $\frac{k}{n}$.

Der preußische Leutnant Netto schlug 1825 ein im Prinzip identisches Werkzeug vor [Nett1825 S. 54ff].

Alternativ wurden diese Geräte auch bei bereits in Dreiecke zerlegten Gebieten als Dreiecksplanimeter verwendet, um die Grundlinie und die Höhe der einzelnen Dreiecke auszumessen, und dann das Produkt zu berechnen oder in Tafeln nachzuschlagen [Lemo1849, S. 61].

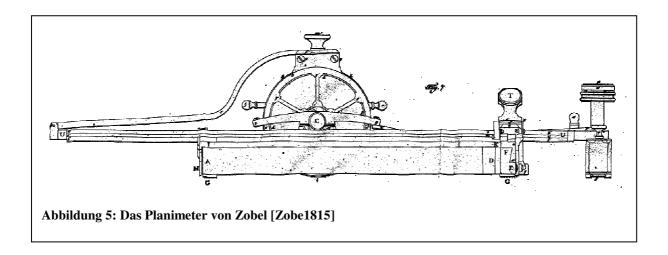
2.2.3 Das Planimeter von Zobel

Auch die "Flächen-Rechnungs und Theilungsmaschine" des bayerischen Trigonometers Zobel, die dieser im Jahr 1815 vorstellt, ist eine Mechanisierung des Harfenplanimeters, die ohne Saiten auskommt.

Im Gegensatz zu Netto verwendet Zobel zur Konstruktion paralleler Streifen allerdings deutlich aufwendigere Mechanik [Zobe1815].

Mittels einer Rasteinrichtung an einer Zahnstange, die Zobel Rechen nennt, wird eine Führungsschiene um Streifenbreite parallel verschoben. Entlang dieser Schiene kann ein Messrad geführt werden. Mittels Druck auf einen Hebel wird das Messrad angehoben und seine Drehbewegung von der Bewegung entlang der Schiene abgekoppelt. Eine Art Cursor erlaubt die exakte Positionierung auf Anfang bzw. Ende eines einzelnen Streifens.

Während einer Flächenmessung wird also immer wieder der Cursor auf den Flächenrand, also den Anfang eines Streifens platziert, anschließend das Messrad mit dem Hebel eingekoppelt. Der Cursor fährt den Streifen bis zum gegenüberliegenden Flächenrand entlang, während das Messrad sich um die Länge dieses Streifens weiterdreht. Am anderen Ende wird das Messrad wieder ausgekoppelt, die Schiene wird im Rechen um einen Zahn weitergeschoben, und der Cursor fährt mit ausgekoppeltem Messrad zurück zum Anfang des nächsten Streifens.

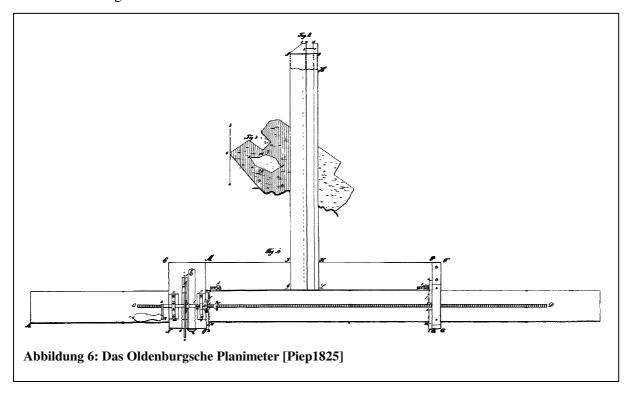


2.2.4 Das Planimeter von Oldenburg

Ebenfalls recht aufwendig ist das Oldenburgsche Planimeter, das laut Pieper bereits 1815 erfunden "...aber aus zu großer Bescheidenheit seines Erfinders nicht öffentlich, sondern nur einigen seiner Freunde bekannt geworden..." sein soll.

Pieper, ein Schüler Oldenburgs, verspricht nicht nur, dass es "wenigstens die Hälfte der Zeit erspart, welche zur Berechnung mit dem Zirkel und dem Maaßstabe erforderlich ist", sondern auch "zugleich die Charte conservirt, denn diese wird weder zerstochen, noch mit Bleylinien verschmutzt" [Piep1825].

Bei diesem Gerät wird ein Messrad an einem Lineal über das zu vermessende Gebiet geschoben. Beginn und Ende des Abrollens des Messrades kann mit Hilfe eines Zeigers präzise positioniert werden. Die zurückgelegte Strecke wird dabei zum Ergebnis hinzuaddiert. Anschließend wird der Messmechanismus mithilfe einer Kurbelumdrehung zum nächsten Streifen weitergeschoben.



2.2.5 Das Planimeter von Beuvière

1845 stellt der französische Katasteramtschef des Departements Côtes-du-Nord, Beuvière, sein Instrument der französischen Akademie der Wissenschaften vor.

Das Gerät besteht aus einem Glaslineal, das mit parallelen Streifen versehen ist, sowie einem Schlitten mit einem Messrad.

Der Schlitten wird auf parallelen äquidistanten Bahnen über die Landkarte geschoben, wobei die Messrolle nur dann abgesenkt wird, wenn sie sich innerhalb des zu vermessenden Gebietes befindet. Auf diese Weise wird beim Überfahren die Länge jeder Bahn gemessen und kann am Messrad abgelesen werden [Will1951], [Mori1913].

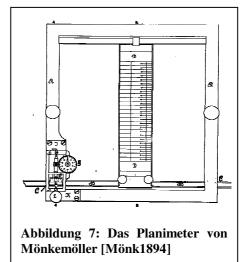
Der Bericht der Prüfungskommission testiert dem Gerät hinreichend hohe Genauigkeit, einfache Bedienbarkeit und einige, allerdings behebbare, Mängel, wie z.B. ein zu hohes Gewicht [Mori1846].

2.2.6 Das Planimeter von Mönkemöller

Einen ähnlichen Ansatz verfolgte Mönkemöller mit seinem im Jahr 1894 patentierten Planimeter.

Auch bei diesem wird ein Schlitten auf parallelen Bahnen über das zu vermessende Gebiet geschoben. Der Schlitten treibt ein im Rahmen des Gerätes fest sitzendes Messwerk, das die zurückgelegten Strecken aufaddiert und als Summe anzeigt [Mönk1894].

Parallel zu den Geräten mit aufwendiger Mechanik, waren auch einfache Tafeln aus Glas, Horn, Ölpapier oder anderen transparenten Materialien mit aufgedruckten Teilungslinien im Gebrauch, so zum Beispiel der Wildasche Flächenmesser, eine auf Zelluleid gedruckte Tefel zur Auswertung von Indikatore



Zelluloid gedruckte Tafel zur Auswertung von Indikatordiagrammen, der 1908 für 2 Mark zu erwerben war [Maye1908].

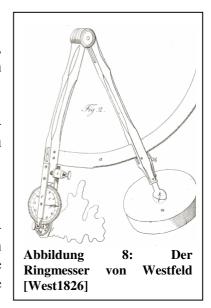
2.3 Ringplanimeter

Eine Fläche aus Streifen konstanter Breite zusammenzusetzen, setzt nicht notwendig voraus, dass diese Streifen gerade sein müssen.

Da Drehbewegungen mechanisch weniger Konstruktionsaufwand benötigen als Geradführungen, liegt es nahe, die zu vermessende Fläche in konzentrische Kreisringe zu zerlegen.

2.3.1 Die Ringmesser von Westfeld und Günther

Dieser Ansatz wird verfolgt im Ringmesser des Landes-Oeconomie-Conducteurs Westfeld aus dem Jahr 1826, der im Prinzip nichts weiter ist als ein Zirkel, der nur bestimmte diskrete Öffnungswinkel zulässt und damit Kreisringe konstanter Breite beschreibt.



Ein Laufrad am Fahrschenkel ist mit einem einfachen Zählwerk mit Übertrag verbunden, an dem die Länge des mit diesem Rad zurückgelegten Bogens abgelesen werden kann [West1826].

Trunk kritisiert mangelnde Präzision und Schwierigkeiten beim Heben und Senken des Laufrands zu Beginn und Ende jeder befahrenen Kreislinie [Trun1865, S. 184].

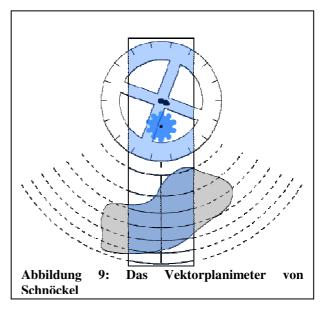
Ein ähnliches Gerät ist das Äquidistanzplanimeter von F. Günther, das Galle beschreibt [Gall1912]. Hier wird der Radius durch eine Schraube verstellt, die für jeden Kreisringabschnitt um eine Vierteldrehung weitergedreht wird.

Eine Messrolle lässt die Gesamtlänge der mit dem Zirkel abgefahrenen Strecken ablesen.

2.3.2 Das Vektorplanimeter von Schnöckel

Vom Westfeldschen Ringmesser unterscheidet sich das 1925 patentierte vom Erfinder Johannes Schnöckel so genannte Vektorplanimeter dadurch, dass es nicht Längen sondern Winkel misst [Schn1925]. Um eine identische Größe der Kreisringabschnitte gleichen Winkels zu erreichen, müssen hier die Breiten der Kreisringe mit zunehmender Entfernung vom Kreismittelpunkt immer geringer werden.

Das Gerät besteht aus einer rechteckigen Platte aus durchsichtigem Material, die um einen Punkt drehbar gelagert ist. Auf der Platte sind Kreisabschnitte gezeichnet, deren Mittelpunkt der Drehpunkt der Platte ist. Die



Platte liegt auf einer runden Scheibe deren Umfang mit einer Skala versehen ist, und die wahlweise die Drehbewegung der Platte mitmacht oder festgehalten wird.

Fährt man nun für jeden auf der Platte gezeichneten Kreis unter Mitnahme der Kreisscheibe von dem einen Rand des zu vermessenden Gebietes zum anderen und schiebt die Platte dann im Leerlauf zurück, so kann man an der Skala der Kreisscheibe die Summe der durchlaufenen Winkel und damit die Fläche ablesen.

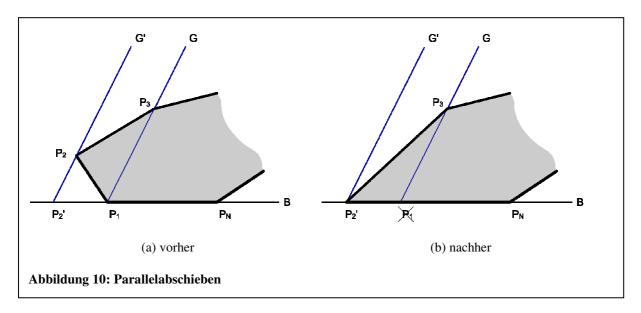
Zusätzlich ist das Gerät noch mit einem einfachen Umdrehungszählwerk versehen [Will1951].

In der Literatur wird häufig auch das Planimeter des Fürther Lehrers Johann Gierer zusammen mit Westfelds Ringmesser genannt. Tatsächlich berief sich Gierer selbst auf dieses Instrument, von dem er bei Bauernfeind [Baue1853] gelesen hatte, und beschloss, "...zu untersuchen, ob es mir nicht möglich wäre, einen Planimeter zu entwerfen, der die oben genannten Figuren nach Elementen von Ringstücken oder Kreisausschnitten misst" [Gier1854]. Bei der Konstruktion seines Ringmessers orientierte sich Gierer jedenfalls stark an dem von Bauernfeind im selben Text beschriebenen Kegel-Rad-Mechanismus. Sein Planimeter ist ein Koordinatenplanimeter, das Polarkoordinaten verwendet. Als Umfahrungsplanimeter misst es die umfahrene Fläche exakt im Rahmen der Messgenauigkeit.

2.4 Verwandlungsplanimeter

Da die Dreiecksfläche im Vergleich zu anderen Polygonflächen vergleichsweise einfach zu berechnen ist, zielen viele Verfahren darauf ab, ein gegebenes Polygon entweder in Dreiecke zu zerlegen, oder aber mit einfachen Mitteln ein Dreieck gleicher Fläche zu konstruieren und dessen Flächeninhalt dann zu ermitteln.

Das Verfahren des Parallelabschiebens wandelt ein Polygon mit *N* Ecken in ein flächengleiches Polygon mit *N-1* Ecken um. So kann sukzessive das ursprüngliche Vieleck in ein Dreieck verwandelt werden, dessen Fläche schnell bestimmt werden kann [Gall1907]:



- 1. Gegeben sei (Abbildung 10 (a)) ein Polygon mit den Eckpunkten P_1 , P_2 , P_3 ... P_N , das so ausgerichtet ist, dass die Kante P_1P_N auf einer Grundlinie P_1 liegt.
- 2. Man ziehe durch P_1 und P_3 eine Gerade G.
- 3. Nun ziehe man (z. B. mithilfe eines Parallellineals) eine zu G parallele Gerade G', durch P_2 . Der Schnittpunkt von G' und B sei mit P_2' bezeichnet.
- 4. Dann sind die Dreiecke $P_1P_3P_2$ und $P_1P_3P_2$ ' (Abbildung 10 (b)) flächengleich, da sie dieselbe Grundlinie $\overline{P_1P_3}$ und dieselbe Höhe haben.
- 5. P_1 erscheint im Polygon nicht mehr als Eckpunkt. Das Polygon P_2 , P_3 ... P_N hat nur noch N-1 Ecken.

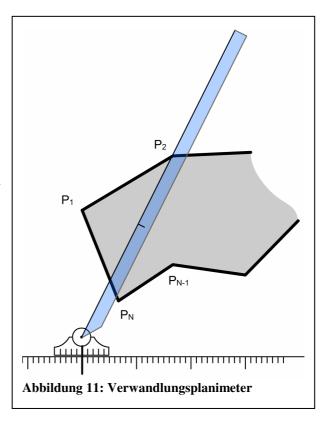
Die Methode des Parallelabschiebens ist bei den sogenannten "Verwandlungsplanimetern" in Mechanik umgesetzt [Gall1912], [Will1951].

Diese bestehen aus einem Basislineal, an dem ein Schieber entlang gleitet, an dem mittels eines Scharniers ein weiteres Lineal befestigt ist. Das Basislineal ermöglicht das Parallelverschieben des drehbaren Lineals und an seiner Skala das Ablesen der Fläche.

Das Gerät wird zunächst unterhalb der zu vermessenden Fläche derart in Position gebracht, dass der Schieber in Nullstellung und das bewegliche Lineal orthogonal zum Basislineal steht und die am weitesten links liegende Ecke P_I berührt. Anschließend wird das drehbare Lineal so gedreht, dass es durch die im Uhrzeigersinn folgende Ecke P_2 geht und anschließend unter Beibehaltung des Winkels so verschoben, dass es wieder durch P_I führt.

Das wird, die Ecken im Uhrzeigersinn durchlaufend, so oft wiederholt, bis das Lineal wieder am Ausgangspunkt P_1 angelangt ist.

Damit hat man die Ausgangsfläche in ein Dreieck umgewandelt, dessen Grundlinie sich von der aktuellen Position des Schiebers zum Nullpunkt des Basislineals erstreckt, und dessen Höhe die Ausgangshöhe des Punktes P_1 ist, also dessen Abstand zum Basislineal.



Wenn man nun noch zu Anfang diese Höhe so gewählt hat, dass sie einer Einheit auf der Landkarte entspricht (z.B. durch eine geeignete Markierung am drehbaren Lineal), dann erspart man sich die Multiplikation und kann die Fläche direkt am Basislineal ablesen.

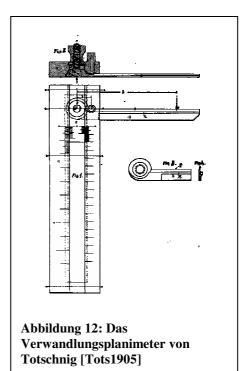
Laut Fuchs erhielt der Oberförster Karl Gangloff im Jahr 1857 die kleine bronzene Medaille der k. k. Landwirthschaftsgesellschaft in Wien für das von ihm entwickelte Verwandlungsplanimeter [Fuch1858, S.456].

Im Jahr 1906 wurde dem Österreicher Hieronymus Totschnig ein Patent auf ein derartiges Instrument erteilt [Tots1905].

Als weitere Konstrukteure ähnlicher Geräte werden Hoffmann [Maye1908] und Schlesinger [Gall1912] genannt.

2.5 Dreiecksplanimeter

Während das Hauptziel der Verwandlungsplanimeter war, ein Polygon in eine einfacher zu berechnende Figur, idealerweise ein Dreieck, umzuwandeln, setzt das Dreiecksplanimeter schon ein in Dreiecke zerlegtes Gebiet als zu berechnendes Objekt voraus, um dann die Flächen der einzelnen Dreiecke zu messen und



aufzuaddieren. Es bietet Unterstützung beim Ermitteln von Maßen, z.B. von Grundlinie und Höhe, die dann entweder mit externen Hilfsmitteln, wie z.B. Multiplikationstabellen oder

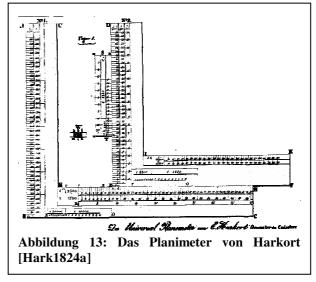
aber durch das Gerät selber multipliziert werden. Da die Flächenberechnung nichts weiter als eine Multiplikation ist, kommen hier auch Verfahren und Geräte zur Anwendung, die schon vorher als Multiplikationsgeräte unabhängig vom konkreten Problem einer zu berechnenden Fläche entwickelt worden waren.

2.5.1 Das Planimeter von Harkort

Vergleichsweise einfach ist das Gerät, das der Kölner Geometer Eduard Harkort 1824 vorstellt [Hark1824a].

Es ist ein Gebinde, bestehend aus einem Lineal und zwei Winkelhaken, mit denen man Grundlinie und Höhe am Dreieck einstellen und an Skalen mit Nonien ablesen kann.

Für die Weiterverarbeitung dieser Werte empfiehlt Harkort sein "Plani-stereometrisches Schieblineal", welches "den Flächenund Cubicinhalt aller Arten Figuren und Körper berechnet, die absoluten Gewichte der letztern bestimmt, Maaße und Gewichte



verschiedener Länder in einander verwandelt u.s.w. und zugleich als Lineal, Dreieck, Maaßstab, Transporteur, Proportionalzirkel und Logarithmentafel dient" [Hark1824b]. Bei diesem "Schieblineal" handelt es sich um den damals in Deutschland noch recht unbekannten Rechenschieber in seiner Ausprägung als Carpenter's Slide Rule.

Ein wichtiges Verkaufsargument für das Harkortsche Planimeter und ein Vorteil gegenüber den Zirkel- und Bleistift-Verfahren, den Harkort schon im Untertitel seines Buches nennt, ist, dass sein Gerät operiert, "ohne die Karten durch die geringsten Zirkelstriche oder Bleilinien zu verunstalten und zu verderben" [Hark1824a].

2.5.2 Das Verfahren von Colberg

Die von dem Warschauer Professor Julius Colberg im Jahr 1825 vorgestellte Methode macht sich den Höhensatz im Dreieck zunutze.

Colberg misst mit dem Zirkel die Längen der Grundlinie g und der Höhe h des zu vermessenden Dreiecks und trägt sie auf einer Geraden, von einem Punkt P ausgehend, nach beiden Seiten ab.

Über dieser konstruierten Basisstrecke der

g P h
Abbildung 14: Das Verfahren von Colberg

Länge g + h zieht er einen Halbkreis und errichtet bei P das Lot als Höhe k des rechtwinkligen Dreiecks in diesem Thaleskreis. Nach dem Höhensatz ist $k^2 = gh$.

Der Wert für k wird mit einem Zirkel entnommen und an einer Maßstabsskala abgelesen.

Eine Tabelle, die zu Werten von k den Wert von $\frac{k^2}{2}$, also den gesuchten Flächeninhalt angibt, wurde von Colberg als "Planimeter" bezeichnet, eine Begriffswahl, die schon seine Zeitgenossen befremdete.

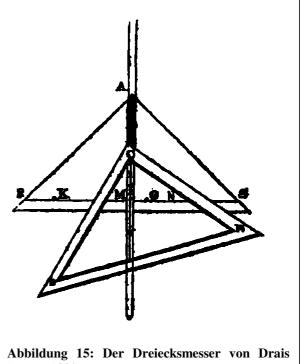
2.5.3 Der Dreiecksmesser von Drais

Der badische Forstmeister Karl Freiherr von Drais, der Erfinder des nach ihm "Draisine" genannten Laufrades und des gleichnamigen Schienenfahrzeugs hat im Jahr 1832 dem Mechanics Magazine ein von entwickeltes Gerät vorgestellt, das das Konstruieren des rechtwinkligen Dreiecks und das Ablesen der Höhe k beim Colberg-Verfahren vereinfacht [MeMa1832].

Sein Dreiecksmesser besteht aus einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck, mit einer Gleitschiene, die senkrecht zur Hypotenuse bis zur Spitze verläuft. Dieses Dreieck ist auf der Arbeitsfläche fest montiert.

Ein zweites ebenso großes Dreieck ist so mit dem ersten verbunden, dass seine Spitze frei drehbar in der Gleitschiene laufen kann.

Analog dem Colberg-Verfahren werden zunächst Grundlinie g und Höhe h des zu



[MeMa1832]

vermessenden Drejecks mit zwei Handzirkeln an der Basislinie RS des festen Drejecks von der Gleitschiene ausgehend nach links und rechts abgetragen.

Das bewegliche Dreieck wird dann mit einem Zugband entlang der Schiene so gegen die beiden Handzirkel gezogen, dass ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenusenabschnitten g und h entsteht.

In einem zweiten Schritt wird nun unter Beibehaltung der Höhe k das bewegliche Dreieck so verdreht, dass einer der beiden Hypotenusenabschnitte die Länge 2 hat. Die Länge des anderen Abschnittes entspricht dann der Fläche des zu vermessenden Dreiecks.

Ein im Prinzip baugleiches Gerät, das mittels des Höhensatzes Längen von Strecken miteinander multipliziert, ist laut Pastore bereits 1768 von dem venezianischen Gelehrten Antonio Maria Lorgna vorgestellt worden [Past1885].

2.5.4 Hyperbeltafeln

Hyperbeltafeln bestehen aus einer durchscheinenden (Glas-) Tafel mit einem Koordinatenkreuz und einer Schar von Hyperbeln, die als Asymptoten alle das Koordinatenkreuz haben. Jede dieser Hyperbeln ist durch eine Gleichung der Form xy = k mit konstantem kbeschrieben.

Um die Fläche eines Dreiecks zu ermitteln, schiebt man die Tafel nun so, dass die Basis AB parallel zur x-Achse der Hyperbeltafel, mit Ecke A auf der y-Achse und die Ecke C auf der x-Achse zu liegen kommt.

Die Konstante k derjenigen Hyperbel, auf deren Ast die Ecke B des Dreiecks zu liegen kommt, entspricht der Fläche des Dreiecks.

95

Ein vielfach verwendetes Modell war die Klothsche Hyperbeltafel, die es für verschiedene Maßstäbe gab.

Die Idee, Hyperbeltafeln zur Multiplikation zweier Größen zu verwenden, ist schon wesentlich älter. Sie geht auf L. E. Pouchet im Jahre 1797 zurück [Maye1908, S. 119], [Past1885, S. 539].

2.5.5 Das Planimeter von Nernst

Eine Möglichkeit, eine Multiplikationsaufgabe dadurch zu vereinfachen, dass man sie auf Additionen zurückführt, ist die bekannte Viertelquadrateformel:

$$ab = \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2$$

bzw. für die Berechnung der Fläche eines \square Abbildun Dreiecks aus den Längen von Grundlinie g und Höhe h:

$$F = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{8}(g+h)^2 - \frac{1}{8}(g-h)^2$$

Der Vermessungsrevisor Nernst stellt 1831 eine Skala vor, die er als Planimeter bezeichnet, und aus der er zu den mit dem Zirkel abgegriffenen Werten (g + h) und (g - h) die zugehörigen Achtelquadrate, also $\frac{1}{8}$ $(g + h)^2$ und $\frac{1}{8}$ $(g - h)^2$ abliest [Nern1831].

2.5.6 Die Viertelquadrattafeln von Zimmermann und Semmler

Die in [Zimm1906] beschriebenen Viertelquadrattafeln von Zimmermann und Semmler nutzen zur Multiplikation von Grundlinie und Höhe eines gegebenen Dreiecks ebenfalls die Viertelquadrateformel und ersparen dabei dem Nutzer noch das Abnehmen der Maße mit dem Zirkel.

Das Zimmermannsche Gerät besteht aus einer Glasplatte, bei der eine Ecke im Winkel von 45 Grad abgeschrägt wurde, an deren oberen Rand eine Quadratskala in geeignetem Maßstab angebracht ist.

Die Platte wird über das zu berechnende Dreieck gelegt und so verschoben, dass Grundlinie und Höhe einmal addiert und einmal subtrahiert werden. Die Viertel-

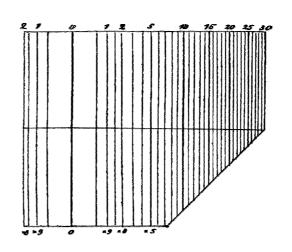


Abbildung 17: Die Viertelquadrattafel von Zimmermann [Zimm1906]

quadrate der Ergebnisse dieser Operationen werden an der Skala des Geräts abgelesen und die beiden so ermittelten Werte voneinander subtrahiert [HaDr2009].

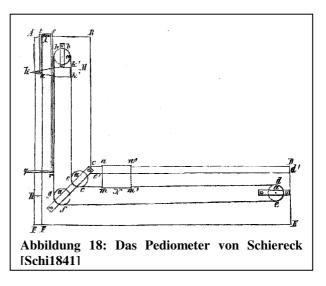
Das Gerät wurde vom Königlichen Landmesser Wilhelm Semmler aus Berlin dahingehend verbessert, dass die Tafel nicht mehr fünf-, sondern viereckig ist und dafür die Skala und die

Bezugslinien um 45 Grad verdreht. Außerdem findet sich die ganze Anordnung nocheinmal gespiegelt wieder, was es ermöglicht, Vierecke mit weniger Arbeitsschritten, als für zwei Dreiecke nötig wären, zu vermessen [Zimm1906].

2.5.7 Das Pediometer von Schiereck

Auch das vom Mathematiker Josef Schiereck in den Zwanzigerjahren des 19. Jahrhunderts erdachte, vom Erfinder so genannte Pediometer, macht sich die Viertelquadrateformel zunutze [Schi1841].

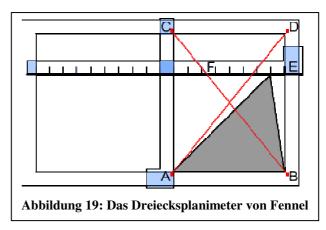
Mittels eines Winkelhakens werden Grundlinie und Höhe eines Dreiecks gemessen und durch einen Mechanismus aus Seil und Umlenkrollen deren Summe bzw. Differenz an ein Lineal angelegt, auf dessen quadratischer sich Skala direkt **Funktionswerte** ablesen lassen. deren Differenz die Fläche des zu messenden Dreiecks ergibt [HaDr2009].



2.5.8 Das Dreiecksplanimeter von Fennel

Das Planimeter, das der Kasseler Hersteller von Vermessungsgeräten Otto Fennel im Jahre 1889 zum Patent anmeldete, führt die Multiplikation von Grundlinie und Höhe des zu berechnenden Dreiecks über ähnliche Dreiecke aus.

Das Gerät besteht aus einem rechteckigen Rahmen, in dem ein senkrechter und ein waagerechter Schieber parallel zu den jeweiligen Rahmenseiten verschiebbar sind.



Die rechten Innenecken B und D des

Rahmens sind über Kreuz durch Drähte mit entsprechenden Punkten A und C des senkrechten Schiebers verbunden. Durch rückseitig angebrachte Gummibänder werden diese Drähte unabhängig von der Position des senkrechten Schiebers immer gespannt gehalten.

Wird nun mit dem senkrechten Schieber die Grundlinie g und mit dem waagerechten die Höhe h des zu vermessenden Dreiecks eingestellt, so liefern Ähnlichkeitsbetrachtungen an den Dreiecken BDC und BEF:

$$\overline{CD} : \overline{DB} = \overline{FE} : \overline{EB}$$

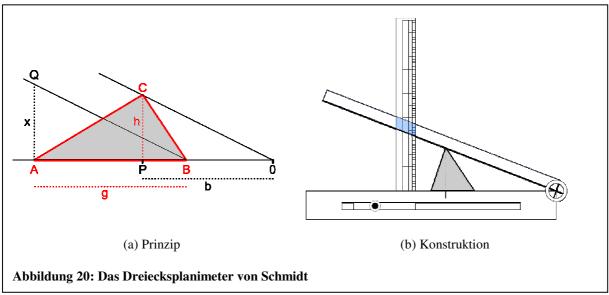
$$g : \overline{DB} = \overline{FE} : h$$

$$\underline{gh} = \overline{FE}$$

DB ist konstant, und damit kann bei geeigneter Skalierung des Maßstabs auf dem waagerechten Schieber, an einer Skala, deren Nullpunkt rechts im Punkt E liegt, am Punkt F die Fläche des Dreiecks abgelesen werden [Fenn1889].

2.5.9 Das Dreiecksplanimeter von Schmidt

Der Gießener Mathematiker Georg Gottlieb Schmidt konstruierte ein Planimeter, das ebenfalls Grundlinie und Höhe des zu berechnenden Dreiecks mittels ähnlicher Dreiecke multipliziert.



Dazu wird das Dreieck ABC mit Grundlinie g und Höhe h derart an einer Strecke positioniert, dass die Grundlinie auf dieser Strecke liegt, und der höchste Punkt C des Dreiecks über einem ausgezeichneten Punkt P, der eine feste Entfernung b vom Nullpunkt hat, zu liegen kommt.

Ist nun eine Gerade durch 0 und C und eine zu dieser parallele Gerade durch B gegeben, dann sind die beiden Dreiecke OPC und BAQ ähnlich, und es gilt h: b = x: g, bzw. x $=\frac{gh}{h}$. Damit ist x proportional zur Fläche des Dreiecks bzw. gibt die Fläche bei geeignet gewählter Skala direkt [Schm1827], [Baue1853], [Hunä1864].

2.5.10 Das Dreiecksplanimeter Wagner

Der in Trier im Katasterdienst beschäftigte Geometer G. Wagner konstruierte im Jahr 1821 ein Dreiecksplanimeter, das mehrfach mit Preisen ausgezeichnet wurde und seinem Erfinder sogar die Österreichische große



Wagner

goldene Ehrenmedaille einbrachte [Wagn1860 S. 2].

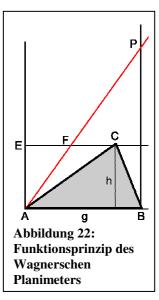
Das Gerät besteht aus zwei orthogonal verbundenen Schienen, auf denen je ein dreieckiger Schieber gleitet.

Am waagerechten Schieber ist in kurzem Abstand von der Laufschiene ein drehbares Lineal befestigt.

Am linken Rand des senkrechten Schiebers verläuft eine Messskala.

Das Planimeter wird so auf das zu vermessende Dreieck ABC gelegt, dass die Grundlinie \overline{AB} auf der oberen Kante des waagerechten Winkelarms aufliegt und die linke Ecke A an den senkrechten Winkelarm stößt.

Die beiden Schieber werden nun auf Grundlinie g und Höhe h des Dreiecks eingestellt, und das Lineal wird so eingestellt, dass es durch die Ecke A läuft. Dann kann am Schnittpunkt des Lineals mit der Skala des senkrechten Schiebers die Dreiecksfläche abgelesen werden [Wagn1821].



Wie man leicht sieht, sind ABP und FEA winkelgleiche Dreiecke.

Mit g = AB und h = AE gilt also:

$$h: \overline{EF} = \overline{BP} : g$$

$$\underline{gh} = \overline{BP}$$

Da \overline{EF} eine Konstante des Gerätes ist, ist die Strecke \overline{BP} proportional zur Dreiecksfläche.

3 Ausblick

Die Lehrbücher für Feldmesser beschränken sich zur Vermessung von Flächen nicht auf geometrische Methoden und die Anwendung von analogen Rechengeräten. Zwei der häufiger verwendeten Verfahren und Methoden sollen hier nicht unerwähnt bleiben.

3.1 Wägemethode

Bei der Wägemethode wird die auszumessende Fläche auf ein flaches Material mit homogener Flächendichte übertragen, ausgeschnitten und gewogen. Die Fläche ergibt sich aus Gewicht und Dichte des Materials.

Edmont Halley ermittelte im Jahr 1693 die Fläche des Königreichs England und seiner einzelnen Grafschaften, indem er sie aus einer Landkarte ausschnitt und das Gewicht der einzelnen Ausschnitte mit dem eines Referenzkreises verglich [Schm1906, S.28].

Den Ungenauigkeiten, die sich durch schwankende Papierdichte ergaben, versuchte er zu begegnen, indem er von jeder Einzelkarte einen eigenen Eichkreis schnitt und das Papier vor dem Wiegen vollständig trocknete.

Später wurden auch Metallfolien verwendet (Netto schlägt Zinnfolie oder Stanniol vor [Nett1825, S. 56].

1847 wurde vom Verein zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen ein Preisgeld für den Entwickler eines möglichst homogenen Materials ausgelobt [Segn1855].

Gerade Chemiker, die ja über genaue Waagen verfügen, haben diese Methode noch am Ende des 20. Jahrhunderts angewandt.

3.2 Die Gaußsche Flächenformel

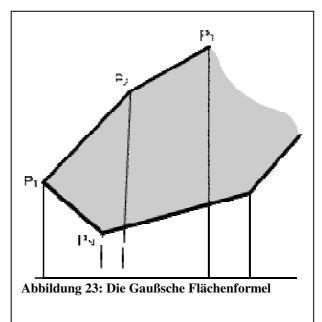
Zuguterletzt sei noch die Gaußsche Flächenformel erwähnt, die laut [Lueb1872] von Gauß bereits 1790 brieflich mitgeteilt worden ist.

Sie ermöglicht die Berechnung der Fläche eines Polygons aus den kartesischen Koordinaten seiner Eckpunkte.

Dazu seien die Eckpunkte P_1 , P_2 , ... P_N mit den Koordinaten (x_1, y_1) , ... im Uhrzeigersinn nummeriert.

Dann gilt für die Fläche A des Polygons: $A = \frac{1}{2} \sum y_i (x_{i+1} - x_{i-1}).$

Ob die Formel in dieser Form je in Mechanik umgesetzt wurde, ist noch zu klären. Trunk bescheinigt ihr auf jeden Fall, als Idee von Gauß "von höherer Art" zu



sein, muss aber einräumen: "der höhere Gedanke beseitigte nicht die Schwierigkeiten der Ausführung" [Trun1865, S. 185].

3.3 Integrierende Planimeter

Für infinitesimal kleine Teilstücke wird die Gaußsche Flächenformel zu einem Spezialfall des Satzes von Green, der Flächenintegrale durch Kurvenintegrale ausdrückt, und der im Koordinatenplanimeter seine Mechanisierung fand.

Ein Umstand, der laut Trunk "...die Feldmesskunst aus den Niederungen der Euklidischen Geometrie in die Sphäre der Cartesius'schen höheren Geometrie und aus der Ebene der gemeinen Arithmetik in die Regionen des Leibnitz'schen und Newton'schen höheren Calcüls erhebt" [Trun1865, S. 22].

Mit dem Aufkommen der Polarplanimeter und ihrer mechanisch relativ einfachen Konstruktion gab es keine Argumente mehr für die Verwendung der nichtintegrierenden Instrumente, die zudem umständlicher zu handhaben waren.

Lediglich einfachst herzustellende Schätzquadrat- und Hyperbeltafeln konnten über den Preis durch ein günstiges Preis-Leistungs-Verhältnis für einfache Anwendungen konkurrieren.

Nicht nur in den Katasterämtern war es Zeit für einen technischen Generationswechsel.

Literatur

- [Baue1853] BAUERNFEIND, Carl M.: Die Planimeter von Ernst, Wetli und Hansen, welche den Flächeninhalt ebener Figuren durch das Umfahren des Umfangs angeben. München: Palm, 1853
- [DeWa1910] DE WAL, R. A.: Planimeterharfe und Planimeterschieber. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (1910), S. 111-113
- [Fava1873] FAVARO, Antonio: Beiträge zur Geschichte der Planimeter. In: *Allgemeine Bauzeitung* (1873), S. 68-90, 93-108
- [Fenn1889] FENNEL, Otto: Flächenmesser für Dreiecke. 1889. Patentschrift DE51037
- [Fisc1995] FISCHER, Joachim: Instrumente zur Mechanischen Integration. In: SCHÜTT, Hans-Werner und BURGHARD, W. (Hrsg.): Brückenschläge. 25 Jahre Lehrstuhl für Geschichte der exakten Wissenschaften und Technik an der Technischen Universität Berlin. 1969 -1994. Berlin : Verlag für Wissenschafts- und Regionalgeschichte Dr. Michael Engel, 1995, S. 111 -156
- [Fuch1858] FUCHS, Adolf: Amtlicher Bericht über die im Mai 1857 abgehaltene fünfzigjährige Jubelfeier der k. k. Landwirthschaftsgesellschaft in Wien. Wien, 1858
- [Gall1907] GALLE, A.: Geodäsie. Leipzig: Göschen, 1907
- [Gall1912] GALLE, A.: Mathematische Instrumente. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner, 1912
- [Gier1854] GIERER, Johann: Entwurf eines Planimeters, mit welchem man den Quadratinhalt ebener Figuren nach Kreisausschnittelementen oder auch nach Ringelementen ausmessen kann. Fürth: Jul. Volkhard, 1854
- [HaDr2009] HAEBERLIN, Barbara und DRECHSLER, Stefan: Die Viertelquadratemethode und das Pediometer des Joseph Friedrich Schiereck. In: SCHMIDT, Werner und GIRBARDT, Werner (Hrsg.): 4. Symposium zur Entwicklung der Rechentechnik, Universität Greifswald. Greifswald, 2009
- [Hark1824a] HARKORT, Eduard: *Der Universal-Planimeter*. Köln : Johann Peter Bachem, 1824
- [Hark1824b] HARKORT, Eduard: *Plani-stereometrisches Schieblineal*. Köln: Johann Peter Bachem, 1824
- [Huls1604] HULSIUS, Levinus: Erster Traktat Der Mechanischen Instrumenten LEVINI HVLSII. Franckfurt: In Verlegung deß Authorn
- [Hunä1864] Hunäus, Georg Christian: Die geometrischen Instrumente der Gesammten praktischen Geometrie, deren Theorie, Beschreibung und Gebrauch. Hannover: Carl Rümpler, 1864
- [Lemo1849] LEMOCH, Ignaz: Lehrbuch der praktischen Geometrie, nebst einem Anhange über die Elemente der Markscheidekunst. Bd. 2. Wien: Wilhelm Braunmüller, 1849
- [Lueb1872] LÜBSEN, Heinrich: Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Leipzig: Friedrich Brandstätter, 1872. – 17. Auflage
- [Maye1908] MAYER, Eugene: *Das Rechnen in der Technik und seine Hilfsmittel*. Leipzig: Göschen, 1908

- [MeMa1832] N.N.: Baron de Drais's Triangle Meter. In: *The Mechanics' Magazine, Museum, Register, Journal* (1832), S. 187 188
- [Mönk1894] MÖNKEMÖLLER: Planimeter. 1894. Patentschrift DE78714
- [Mori1846] MORIN: Rapport sur un nouveau planimètre preésenté par M. A. Beuvière géomètre en chef du cadastre du département des Côtes-du-Nord. In Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (1846)
- [Mori1913] MORIN, H. de: Les Appareils d'Intégration. Paris : Gauthier-Villars, 1913
- [Nern1831] NERNST: Über die Einrichtung, den Gebrauch und die Vorzüge eines neuen Planimeters. In: Sitzungsberichte des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses 10 (1831), S. 88 89
- [Nett1825] NETTO, Friedrich August: Handbuch der gesammten Vermessungskunde, die neuesten Erfindungen und Entdeckungen in derselben zugleich enthaltend. Berlin: Carl Friedrich Amelang, 1825
- [NVBr1863] NVB BRÜNN: Verhandlungen des Naturforschenden Vereines in Brünn. Brünn, 1863
- [Olde1879] OLDENDORP, Eduard: Lebensgeschichte und Erfahrungen des Ober-Commissairs Oldendorp in den Jahren 1795 -1881. Unveröffentlichtes Manuskript, 1879
- [Past1885] PASTORE, Giuseppe: Macchine da calcolare. In: Enciclopedia delle Arti e Industrie. Torino, 1885, S. 482 575
- [Piep1825] PIEPER, Herrmann: *Der Oldenburgsche Planimeter*. Lüneburg: Herold und Wahlstab, 1825
- [Schi1841] SCHIERECK, Joseph: Beschreibung des Pediometers, eines Instruments, um den Flächeninhalt in Karten ohne Rechnung zu erhalten. In: *Dinglers Polytechnisches Journal* (1841), S. 251 265
- [Schm1827] SCHMIDT, Georg: Beschreibung eines neuen Planimeters Eine Zugabe für die Anfangsgründe der Mathematik 1r Theil. Frankfurt am Main: Franz Warrentrapp, 1824
- [Schm1906] SCHMIEDEBERG, Walther: Geschichte der geographischen Flächenmessung bis zur Erfindung des Planimeters Inauguraldissertation zur Erlangung der Doktorwürder der Hohen Philosophischen Fakultät der Georgs-Augustus-Universität zu Göttingen. Sonderabdruck aus der Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde, Göttingen, 1906
- [Schn1925] SCHNÖCKEL, Johannes: Vektorplanimeter. 1925. Patentschrift DE441881
- [Segn1855] SEGNITZ, E.: Über die Anforderungen an einen zur Prüfung von Ackergeräthen geeigneten Kraftmesser. In: Annalen der Landwirthschaft in den Königlich Preußischen Staaten (1855)
- [Tots1905] Totschnig, Hieronymus: *Planimeter*. 1926. Patentschrift AT26205B
- [Trun1865] TRUNK, Christoph: *Die Planimeter, deren Theorie-, Praxis und Geschichte.* Halle: H. W. Schmidt, 1865
- [Wagn1821] WAGNER, G: *Ueber den Gebrauch und die Einrichtung des vor kurzem erfundenen Planimeters von dem Professor G. Wagner.* Frankfurt am Main : Jägersche Buch-, Papier- und Landkartenhandlung, 1821
- [Wagn1860] WAGNER, G: Das Entstehen und die Fortführung des rheinischwestphälischen Grundsteuer-Katasters. Düsseldorf : In Commission der

Schaub'schen Buchhandlung, 1860

- [West1826] Westfeld, O.: Der Ringmesser, ein Instrument, um Flächen zu berechnen. Göttingen, 1826
- [Will1911] WILLERS, Theodor: Zur Geschichte der geographischen Flächenmessung seit der Einführung des Planimeters Inauguraldissertation zur Erlangung der Doktorwürde der Hohen Philosophischen Fakultät der Georgs-Augustus-Universität zu Göttingen. Gotha: Justus Perthes, 1911
- [Will1951] WILLERS, Theodor: *Mathematische Maschinen und Instrumente*. Berlin: Akademie-Verlag, 1951
- [Zimm1906] ZIMMERMANN, Ludwig: Konstruktion eines Flächenmessers von Semmler. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (1906)
- [Zobe1815] ZOBEL, Johann: Beschreibung einer Flächen-Berechnungs- und Theilungs-Maschine nebst einer Anleitung zu ihrem Gebrauche. München: Joseph Lindauer, 1815