

# Logarithmen und Astronomie

## Logarithms and Astronomy

Klaus Kühn, Alling-Biburg

### 1 Abstrakt

Mit der Vermessung der Erde (Geometrie) und der Beobachtung des Himmels fing die messende Wissenschaft an. Das Wissen um die Sterne und den Kosmos, die Astronomie, hat die Menschheit bereits sehr früh beschäftigt. Sie ist als Ursprung der Mathematik zu sehen, die als Einzelwissenschaft relativ jung ist.

Besondere Bedeutung hat in der Astronomie die Trigonometrie gewonnen, die die Basis für die Lösung astronomischer Aufgaben bildete. Besonders die sphärische Trigonometrie, die Lehre/Kunde von den Verhältnissen auf einer Kugel wurde ein wichtiges Teilgebiet, weil sich der beobachtende Mensch sowohl den Kosmos und später auch die Erde als Kugelgestalt modellierte. Die Berechnungen in der sphärischen Trigonometrie können sehr umfangreich und aufwändig sein, so dass der Astronom jede Art von Rechenerleichterungen gerne annahm.

Ca. 150 Jahre v.Chr. soll Hipparch Sehnen tafeln berechnet haben, um aus messbaren Größen nicht direkt messbare zu bestimmen. Bereits kurze Zeit später haben die Inder mit weiteren Winkelfunktionen gearbeitet und entsprechende Tafeln aufgestellt. Diese Tafeln wurden durch die Araber um ca. 800 n.Chr. durch weitere Winkelfunktionen ergänzt. Später kamen als Rechenhilfsmittel islamische (sexagesimale) Multiplikationstafeln, dann um 1500 n.Chr. die sehr genauen Winkelfunktionstafeln von Regiomontanus (1436-1476) und von Rheticus (1514-1574) hinzu. In dieser Zeit erleichterte der Einsatz der Prosthaphärese aufwändige Berechnungen. Eine wesentliche und epochemachende Vereinfachung der Berechnungen, die auch der erforderlichen Genauigkeit Rechnung trug, erfolgte im Jahre 1614 durch die Veröffentlichung der ersten Logarithmentafel durch John Napier (1550-1617). Weitere Rechenvereinfachungen wie die Entwicklung von Rechenmaschinen, von astronomischen Rechenschiebern und Taschenrechnern als Rechenhilfsmittel folgten, die schliesslich in den Einsatz des digitalen Computers mündeten.

In diesem Beitrag soll die Rolle der Logarithmen dargestellt werden, wie sie sich von John Napier, Henry Briggs (1560-1630), Jost Bürgi (1552-1632) und Johannes Kepler (1572-1630) zu den modernen Ausgaben von Logarithmentafeln aus dem 20. Jahrhundert verfolgen lässt. In diesem Artikel will ich mich auf die wesentlichen Tafeln beschränken, die sich bei ihrem Einsatz besonders hervorgetan haben. Als wichtige Referenz wurde die Zusammenstellung von James Henderson<sup>1</sup> herangezogen, in der sich eine hervorragende und einzigartige Übersicht der Tafeln findet, die bis ca. 1925 erschienen sind. Weitere Tafeln sind im Rechnerlexikon<sup>2</sup> zusammengestellt.

Auch soll der Frage nachgegangen werden, was Johannes Kepler zu seinen eigenen Berechnungen und zur eigenen Veröffentlichung der Logarithmen im Jahre 1624 veranlasst hat.

Diese Arbeit ist bewusst im Jahr der Astronomie 2009 erschienen, das sowohl der Erfindung des Fernrohrs durch den holländischen Brillenmacher Hans Lipperhey (1570-1619) wie auch der Veröffentlichung der "Astronomia Nova" durch Johannes Kepler - eines der bahnbrechenden Bücher über unser Sonnensystem, in der Kepler die Ellipse als ideale Bahnkurve der Planeten darstellt - vor 400 Jahren Rechnung trägt.

Die in dieser Arbeit genutzte Literatur und Beispiele können und sollen Lehrern als Anregung dienen, die ihren Schülern an Hand praktischer Rechenbeispiele die Bedeutung der Logarithmen näher bringen wollen.

---

<sup>1</sup> Henderson, James; Logarithmic Tables - Part I in Bibliotheca Tabularum Mathematicarum Band XIII; Cambridge University Press, London 1926

<sup>2</sup> [www.Rechnerlexikon.de/artikel/Logarithmentafeln](http://www.Rechnerlexikon.de/artikel/Logarithmentafeln)

## 2 Einleitung

Astronomie und Mathematik sind u. a. durch die sphärische Trigonometrie eng miteinander verbunden. Viele Aufgaben aus der Astronomie - schon früh stellte man sich Erde und Himmelsgewölbe als Kugel vor - werden mit Hilfe von sphärisch-trigonometrischen Formeln berechnet. So ist es nicht verwunderlich, dass beide Fachgebiete eine fast parallele Geschichte aufweisen, wobei der Begriff Mathematik erst relativ spät geprägt wurde.<sup>3</sup> Für einen Nicht-Astronomen braucht es einige Gewöhnungsdauer, bis er sich die Grundlagen astronomischer Berechnungen (aus der Literatur) angeeignet hat, besonders, wenn er erst einmal die Grundbegriffe der sphärischen Trigonometrie lernen muss.

Hintergrundinformationen dazu sollen daher in dieser Arbeit nur insoweit geliefert werden, wie sie zum Verständnis der Schilderungen erforderlich sind.

In der sphärischen Trigonometrie haben sich im Laufe der Jahre die Formelsammlungen mit immer neuen Formeln erweitert, die zu astronomischen Berechnungen herangezogen wurden, so dass inzwischen mehrere Seiten damit zu füllen sind.

Im Wesentlichen handelt es sich bei den trigonometrischen Aufgaben um 6 Typen:

Gegeben sind		Gesucht sind
drei Seiten (a, b, c)		die drei Winkel ( $\alpha, \beta, \gamma$ )
drei Winkel		die drei Seiten
zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel		die anderen Winkel und eine Seite
zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel		die anderen Winkel und eine Seite
zwei Winkel und die eingeschlossene Seite		die anderen Seiten und ein Winkel
zwei Winkel und eine gegenüberliegende Seite		die anderen Seiten und ein Winkel

Hierbei sind die Arten der Dreiecke zu unterscheiden in: planar oder sphärisch rechtwinklig; planar oder sphärisch schiefwinklig; mit Winkelgrößen unter oder über  $90^\circ$ . Eine detailliertere Kategorisierung der sphärischen Dreiecke von Johannes Werner (1468-1522), erstellt um 1500, findet sich in Addendum 2 aus A. Björnbo<sup>4</sup>.

Bereits in den Jahren 1462 -1464 hatte Regiomontanus (Camillus Johannes Müller aus Königsberg in Unterfranken; 1436 - 1476) die Schrift "De Triangulis Omnimodis" verfasst, die erst nach seinem Tode 1533 in Nürnberg gedruckt wurde.

Mit diesen Arbeiten von J. Werner und Regiomontanus ist die neuzeitliche Trigonometrie begründet worden.

Abgesehen davon, dass in der sphärischen Trigonometrie andere Gesetzmäßigkeiten gelten als in der ebenen/planaren Trigonometrie, kommen in der Astronomie verschiedene Betrachtungsweisen der Sphäre/der Himmelskugel zum Tragen. Das hängt davon ab, welche Fragestellungen zu bearbeiten sind.

Die Entdeckung der Logarithmen war ein Quantensprung, der die vielen trigonometrischen Berechnungen erheblich vereinfachte.

<sup>3</sup> See Sperry, Pauline; Short Course in Spherical Trigonometry; Johnson Publishing Company, Richmond 1928; Her Historical Sketch from this book is attached to this paper

<sup>4</sup> Ioannis Vernerii (Johannes Werner) 4 Bücher De Triangulis Sphaericis in Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen Heft XXIV Verlag B.G. Teubner 1913

### 3 Das Poldreieck

Zunächst geht man vom einfachsten Falle aus, dass sich die Astronomie unter anderem mit der Position(sbestimmung) der Sterne am Himmel beschäftigt. Ein Beobachter schaut also zu einer bestimmten Nacht-(Zeit) in den Himmel, dessen halbkugeliges Gewölbe durch den **Horizont** begrenzt ist. Für ihn erscheint die Erde im Mittelpunkt des Weltalls zu stehen.

Wenn er seine Beobachtungen für einen längeren Zeitraum (Dauer) macht, wird er feststellen, dass sich die Sterne "bewegt" haben, sich Ihre Position geändert hat. Allerdings weiss er inzwischen (seit Kopernicus), dass sich nicht das Himmelsgewölbe bewegt hat, sondern dass sich die Erde bewegt hat. Diese Drehbewegung der Erde erfolgt um die Erdachse, die sich aus der Verbindung von Nord- und Südpol ergibt, einmal pro 24 Stunden (Tag und Nacht). Die zugehörige Dreh-Ebene bezeichnet man als den **Äquator**, der senkrecht zur Erdachse steht und gleichzeitig einen Teil des Himmelsäquators darstellt.

Nun dreht sich die Erde insgesamt noch um die Sonne, wozu sie ca. 365 Tage benötigt. Die Ebene, die die Bahn der Erde um die Sonne bildet, nennt man **Eklipse**.

Um sich entsprechende leichter verständliche und anwendbare Modelle zu bauen, werden diese drei Ebenen mit drei selbständigen und voneinander unabhängigen Koordinatensystemen dargestellt:

1. Horizontales (Fixierung des Beobachters mit der Erde)
2. Äquatoriales (Fixierung der Erde mit dem Sternenhimmel, um ein raumfestes Koordinatensystem der Gestirne zu schaffen, berücksichtigt die Bewegung der Erde um die Erdachse)
3. Ekliptisches (Fixierung der Erde mit der Sonne, berücksichtigt die Bewegung der Erde um die Sonne)

Für manche Betrachtungen werden diese Koordinatensysteme entweder z. B. zu zweit kombiniert oder durch Berechnungen transferiert. Bei der Kombination des horizontalen und des äquatorialen Koordinatensystems zur Berücksichtigung des sich mit der Erde bewegenden Beobachters entsteht ein besonderes Dreieck, das Poldreieck, auch astronomisches oder nautisches<sup>5</sup> Dreieck genannt, das sich aus dem Zenit = Z (steht senkrecht über dem Standort des Beobachters), der Position des Gestirns = Stern und der Position des über den Erdachsen-Pol verlängerten Himmels-Poles = P ergibt.

	<p>2. Ermittlung des Bestimmungspunktes der Standlinie.  § 152. Da der Bestimmungspunkt ein Punkt der Höhengleiche ist, so muß er die sich aus Fig. 69 ergebende Gleichung erfüllen.</p> <p>Fig. 69</p>
<p>Die Zusammenhänge zwischen horizontalen und äquatorialen Koordinatensystemen und deren Begrifflichkeiten werden in dieser Abbildung dargestellt.</p>	<p>Diese Abbildung entstammt dem Lehrbuch für Navigation, Band II Astronomische Navigation, Seite 181; Marineamt Berlin 1906 und stellt den Zusammenhang zwischen der Himmels- und der Erdsphäre dar, in der durch Projektion die gleichen Winkelverhältnisse gelten.</p>

<sup>5</sup> Nautisch deswegen, weil dieses Dreieck zu Navigationszwecken in der Schifffahrt herangezogen wird



#### 4 Tafeln zur Berechnung von Aufgaben aus der Trigonometrie

Im Zusammenhang mit Logarithmen haben die Tafeln des Astronomen und Mathematikers Regiomontanus besondere Bedeutung, da sie die Basis für die Berechnungen der logarithmischen Sinus-Werte in der Tafel von John Napier bildeten. Hierzu ist im Skidstick <sup>7</sup> folgender Beitrag erschienen:

"Table of Sines: some additions

At the IM 2008 Bob Otnes<sup>8</sup> presented „The Table of Sines and Cosines Employed by Napier“. Assisted by Joachim Fischer he mentioned the table from Erasmus Reinhold (1511-1553) “Primus Liber Tabularum Directionum, Discenibus Prima Elementa” Tübingen 1554 as the source of sines and cosines for Napier.

I would like to add to this info some findings of E. Glowatzki and H. Göttsche who in 1990 have published “Die Tafeln des Regiomontanus – ein Jahrhundertwerk” (Institut für Geschichte der Mathematik, München; ISBN 3-89241-001-1)<sup>9</sup>.

These authors are aware of the recommendation by Napier, which he made in his “Constructio” from 1619 (“Hos sinus supeditabit tibi communis sinuum REINHOLDI Tabula, vel si qua exactior”).

Due to Glowatzki and Göttsche’s error analyses (misprints or calculating errors) of several sine tables, they found that the origin of Reinholds table of sines was one calculated in 1468 by Regiomontan (Johannes Müller; 1436-1476), printed in 1541 “Compositio Tabularum Sinuum”, Nürnberg <sup>10</sup>. In his “Primus Liber Tabularum Directionum, Discenibus Prima Elementa” <sup>11</sup> Reinhold has calculated the tangents (68 pages) on the basis of Regiomontan’s table of sines from 1468 (R=10 000 000) and the table of sines called “Canon Sinuum vel semissium Rectarum in circulo Subtensarum” was a 36 page part of it. In this table Reinhold still published 15 misprints of those originated from Regiomontan, although he had eliminated some of the others: Table 32 on page 152 of [1] :

Prüfung 1 ergibt, daß REINHOLD zwar viele Druckfehler durch Berechnung der Tafeldifferenzen erkannt hat. Trotzdem hat er noch 15 Druckfehler gemäß Tabelle 32 übernommen.

Bogen G M	Sinuswert bei REINHOLD = REGIOMONTANUS	exakter Sinuswert (R = 10 000 000)
13 28	2 328 799	2 328 796
27 55	4 671 869	4 681 869
31 19	5 197 667	5 197 676
31 38	5 244 614	5 244 813
31 56	5 299 321	5 289 322
32 41	5 399 855	5 399 955
33 8	5 465 802	5 465 892
37 57	6 149 746	6 149 736
38 6	6 170 259	6 170 359
51 22	7 812 574	7 811 574
54 8	8 104 827	8 103 826
55 16	8 219 127	8 218 127
57 14	8 418 816	8 408 816
62 18	8 852 936	8 853 936
79 11	9 822 227	9 822 327

Tabelle 32: Bei Prüfung 1 festgestellte 15 Druckfehler, die REINHOLD aus der Sinus-Tafel von REGIOMONTANUS in sein Werk “Primus Liber Tabularum Directionum” von 1554 übernommen hat

<sup>7</sup> Kühn, Klaus; SkidStick No. 31, p. 14-16; February 2009; ISSN 1466-3570

<sup>8</sup> Otnes, Robert K.; The Table of Sines and Cosines Employed by Napier, Proceedings IM 2008, Seite 175 - 177

<sup>9</sup> Glowatzki, E. and Göttsche H.; Die Tafeln des Regiomontanus – ein Jahrhundertwerk (Institut für Geschichte der Mathematik, München; 1990; ISBN 3-89241-001-1

<sup>10</sup> Regiomontanus (Johannes Müller; 1436-1476); Compositio Tabularum Sinuum, Nürnberg, 1541

<sup>11</sup> Reinhold, Erasmus; Primus Liber Tabularum Directionum, Discenibus Prima Elementa, 1554

The same authors performed an error analysis also with John Napier's natural sines in his works from 1614, 1620, and 1658 and concluded that he had taken those values from Thomas Finck's (1561-1656) "Geometriae Rotundi" (published in 1583)<sup>12</sup> or from Phillip Lansberg's (1560-1632) "Triangulorum Geometriae" (1591)<sup>13</sup> since all those tables contain 18 errors of the same type.

Glowatzki and Götsche have compiled those errors in the table below (Table 36 on page 157 of [1]):

Gemäß Prüfung 1 hat FINCK 18 Druckfehler, von denen einige recht grob sind, aus der Tafel von REGIOMONTANUS übernommen. Sie sind in Tabelle 36 zusammengestellt. Ein geänderter Druckfehler tritt außerdem bei 14° 41' auf: Bei FINCK: 2 524 766, statt exakt: 2 534 766.

Bogen G M	Sinuswert bei FINCK = REGIOMONTANUS		exakter Sinuswert (R = 10 000 000)
4 24	767	180	767 190
13 28	2 328	799	2 328 796
17 14	2 962	630	2 962 638
27 4	4 540	270	4 550 269
31 19	5 197	667	5 197 676
31 56	5 299	321	5 289 322
32 41	5 399	855	5 399 955
33 8	5 465	802	5 465 892
37 57	6 149	746	6 149 736
38 6	6 170	259	6 170 359
39 24	6 347	309	6 347 305
53 59	8 089	460	8 088 460
54 8	8 104	827	8 103 826
57 14	8 418	816	8 408 816
57 58	8 477	297	8 477 297
58 43	8 546	096	8 546 099
62 18	8 852	936	8 853 936
79 11	9 822	227	9 822 327

**Tabelle 36:** Bei Prüfung 1 festgestellte 18 Druckfehler, die FINCK, LANSBERG und NAPIER aus der Sinus-Tafel von REGIOMONTANUS in ihre Werke "Geometriae Rotundi" von 1583 bzw. "Triangulorum Geometriae" von 1591 bzw. "Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio" von 1614, 1620 und 1658 übernommen haben

Prüfung 2 ergibt, daß FINCK von den 13 Abweichungen ( $\pm 2$ ) von den exakten Werten 12 übernommen hat. Eine Ausnahme macht wie bei REINHOLD 1554 der Sinuswert für 17° 20', dessen Abweichung um eine Einheit verringert ist (bei FINCK: 2 979 304, statt exakt: 2 979 303).

Unfortunately we do not know anything about the library of John Napier, but it is not far from thinking that he had acquired a table of sines while he was on the European continent (1564 – 1570?), may be that of Erasmus Reinhold and only later he got hold of the tables from either Finck (published in Basel) or Lansberg (published in Leiden) or both."

Einen Canon der Sinus, Tangenten und Secanten hat der österreichische Astronom und Mathematiker Georg Joachim Rheticus (1514 - 1574) mit großem Aufwand errechnet. Der Canon ist unter dem Namen "Opus Palatinum de Triangulis" von seinem Vertrauten Valentin Otho (1548 - 1603, Mathematiker) im Jahr 1596 in Neustadt in der Pfalz/Heidelberg herausgegeben worden.



14

14

<sup>12</sup> Finck, Thomas (1561-1656); Geometriae Rotundi, Basel, 1583

<sup>13</sup> Lansberg, Phillip (1560-1632); Triangulorum Geometriae, Leiden, 1591

<sup>14</sup> Die Abbildungen dieser Tafelwerke entstammen dem Fundus des Deutschen Museums München und der Bayrischen Nationalbibliothek; mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. J. Fischer

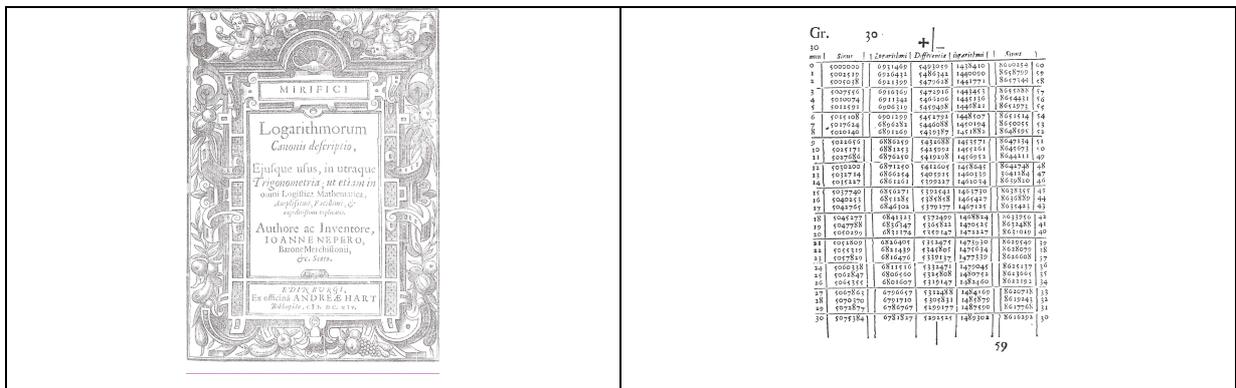


### 5 Übergang zu den Logarithmen

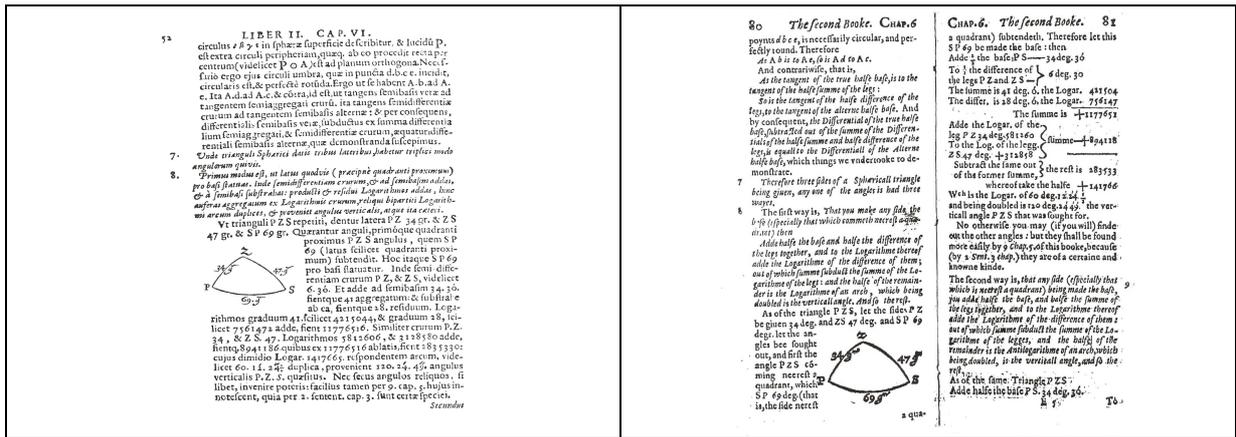
In der Astronomie wurden zu dieser Zeit die Beobachtungen und Messungen immer genauer und man wollte zu Berechnungen mit den erhaltenen Werten natürlich auch dem Stand der Technik folgen.

Etwa 100 Jahre lang diente seit etwa 1500 zu diesen Berechnungen die Methode der Prosthaphärese<sup>17</sup>, die eine Multiplikation zu Addition und Subtraktion vereinfachte.

Wie aus der Tabelle von Pitiscus zu ersehen ist, konnte es bei astronomischen Berechnungen zur Multiplikation oder Division von 15stelligen Ziffern kommen. Diese Berechnung war auch mit der Prosthaphärese aufwändig. So passte es bestens in die Zeit, dass gerade 1 Jahr nach dem Erscheinen des "Thesaurus Mathematicus" im Jahre 1614 die erste Logarithmentafel<sup>18</sup> [Henderson # 1.0] von John Napier, Lord of Merchiston, erschien. Mit Hilfe der Logarithmen konnte man Multiplikationen oder Divisionen auf Addition bzw. Subtraktion vereinfachen. Napier wollte mit seiner Tafel besonders die Astronomen rechnerisch entlasten, was sich in dieser Veröffentlichung der Logarithmen der Sinuswerte offenbart. Numerische Logarithmen kamen erst später auf den Markt.



Im Liber Primus gibt Napier auf 20 Seiten Erklärungen zu den Logarithmen und Anleitungen zum Umgang mit der Tafel. Von Seite 21 bis 57 des Liber Secundus bringt Napier zahlreiche Rechenbeispiele aus der Trigonometrie. Unter anderen auch die zu Berechnungen des Poldreiecks, wie in der folgenden Abbildung dargestellt (links das Original, rechts die Übersetzung von Edward Wright aus dem Jahre 1618 [Henderson # 3.0]).



Wann diese Rechenbeispiele "nicht-logarithmisch" das erste Mal entstanden sind, ist mir nicht bekannt. Aber es ist anzunehmen, dass sie bereits in früheren trigonometrischen Werken erschienen sind.

Ab Seite 58 folgen dann die Sinuswerte und deren Logarithmen für jede Minute im 1. Quadranten (von 0 - 90 °), siehe obiges Beispiel für 30°, d.h. pro Grad 2 Seiten. Das entspricht für 45 ° = 90 Seiten.

<sup>17</sup> Kühn, Klaus; Die Prosthaphärese und Johannes Werner (1468 - 1528) - Vorläufer der Logarithmen; [www.rechenschieber.org](http://www.rechenschieber.org); RS Brief 17; April 2008

<sup>18</sup> Napier, John; Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, Andre Hart Edinburgh 1614

Im Weiteren orientieren wir uns an der Einteilung der Logarithmen von Henderson in Napier'sche (zu denen wir der Einfachheit halber die hyperbolischen mit der Basis  $e$  zählen), Briggs'sche und Antilogarithmen.

Zu Herausgebern, Autoren und Berechnern der **Napier'schen Logarithmen** zählen unter anderen Benjamin Ursinus - Keplers Gehilfe in Prag und Linz - (Kopie der Napierschen Logarithmen auf 5 Stellen reduziert in *Cursus Mathematici Practici* 1618 [Henderson # 4.0] und einer Neuberechnung *Trigonometria cum magnum Logarithmorum ...* 1624 [Henderson # 8.0]), Johannes Kepler (*Chilias Logarithmorum* 1624 [Henderson # 7.0] und *Tabulae Rudolphinae* 1627 [Henderson # 10.0]), Peter Crüger (1634 [Henderson # 11.0]), Juan Caramuel (1670 [Henderson # 12.0]), J.C. Schulze (1778 [Henderson # 13.0]), Francis Maseres (1791 - 1807 [Henderson # 14.0]) sowie H. Filipowski (1857 [Henderson # 15.0])

In dieser Arbeit gehen wir hauptsächlich auf die Tafeln von Johannes Kepler (1571 - 1630), dem bedeutendsten Astronomen, ein. Zunächst hat Kepler 1624 die *Chilias Logarithmorum* veröffentlicht und dies, nachdem bereits die Tafeln von Napier (1614) und Bürgi (1620) erschienen waren, von denen Kepler wusste. Der Grund für seine Neuberechnungen lag in der negativen Haltung seines Mathematikprofessors in Tübingen Michael Mästlin (1550 - 1631), der die Logarithmen, die Napier auf kinematische Weise ermittelt hatte, als nicht mathematisch ablehnte: Mästlin schrieb: "Ich halte es für unwürdig eines Mathematikers, mit fremden Augen sehen zu wollen und sich auf Beweise zu stützen oder als solche auszugeben, die er nicht verstehen kann....Deshalb mache ich mir einen Kalkül nicht zu eigen, von dem ich glaube oder annehme, daß er bewiesen sei, sondern nur einen, von dem ich das weiß."<sup>19</sup>

Daraufhin wollte Kepler, der die besondere Bedeutung der Logarithmen für die Mathematik bereits erkannt hatte, deren Verbreitung durch die Einstellung von Mästlin und anderer Zeitgenossen nicht behindert sehen. Mit enormem Aufwand und Mühe hat Kepler eine mathematische (euklidische) Berechnungsmethode für die Logarithmen entwickelt und die Logarithmen quasi neu berechnet. Dies beweist er u.a. damit, dass er den Logarithmus von 2 ( $\ln 2$ ) mit 0,6931472 berechnet hatte, während Napier dafür einen Wert von 0,6931469 ermittelt hatte<sup>20</sup>. Die Veröffentlichung der daraus entstandenen *Chilias Logarithmorum* erfolgte im Jahr 1624.

In diesem Zusammenhang soll auf die Arbeiten von Detlef Gronau zur logarithmischen Funktionalgleichung von Kepler hingewiesen werden<sup>21</sup>.

Die Spalten der Tabelle in den *Chilias Logarithmorum* sind unterschiedlichen Rechenanforderungen angepasst, erstens dem trigonometrischen Rechnen und zweitens dem der Stundenquantitäten (Spalten 3 und 5), die für astronomische Berechnungen genutzt wurden. Die Äquidistanz der Werte bezieht sich auf die Sinusse. Die Spalten haben folgende Bewandnis:

Spalte 1: Arcus entspricht dem Winkel z.B. 30.0.0 Grad (und Differenzen zweier benachbarter Werte)

Spalte 2: Sinus entspricht dem natürlichen Sinuswert z.B. 50000.00

Spalte 3: Arcus auf 24 Stunden bezogen (=  $24 \times 500/1000 = 12$ )

Spalte 4: Logarithmus der Sinuswerte,  $\ln 0.50000.00 = [6931472]$ ; Minus- oder Pluszeichen hinter den Werten deuten Rundungsfehler an (und Differenzen zweier benachbarter Werte)

Spalte 5: Arcus auf 60 Stunden bezogen (=  $60 \times 500/1000 = 30$ )

Zwar hat Kepler die Methodik zur Berechnung seiner *Chilias* in diesem Band ausführlich dargelegt, hat aber diesem Band keine Rechenbeispiele beigelegt. Diese hat er in einem 72seitigen Supplementum ohne Tabellen im Jahre 1625 nachgereicht. Dort finden wir auch wieder Aufgabenbeispiele zum bereits angesprochenen Poldreieck im Kapitel "De Triangulis Obliquangulis Sphaericis". In diesem Supplementum hat Kepler ausdrücklich darauf hingewiesen, dass nicht er der Entdecker der Logarithmen sei, sondern dies allein John Napier zustehe.

<sup>19</sup> Kepler, Johannes; *Gesammelte Werke* Band IX Herausgeber F. Hammer 2. Auflage 2000; S. 463/355

<sup>20</sup> Paulin, Eugen; private Kommunikation aus der Übersetzung der "Histoire des Logarithmes de Neper a Euler" von Charles Naux Band 1 Librairie Blanchard, Paris 1966; S. 132ff

<sup>21</sup> Gronau, Detlef; Johannes Kepler (1571 - 1630) Die logarithmischen Schriften; S. 253ff in "Verfasser und Herausgeber mathematischer Texte der frühen Neuzeit" Hrsg. R. Gebhardt Adam-Ries-Bund, Band 14, 2002

**Joannis Kepleri**  
 IMP. CÆS. FERDINANDI II.  
 MATHEMATICI  
*CHILIAS*  
**LOGARITHMORUM**  
 AD TOTIDEM NUMEROS  
 ROTUNDOS,  
 Præmissa  
*DEMONSTRATIONE LEGITIMA*  
 Ortus Logarithmorum eorumque usus  
 Q U I B U S  
 NOVA TRADITUR ARITHMETICA, SEU  
 COMPENDIUM, QUO POST NUMERORUM NOTITIAM  
 nullum nec admirabilius, nec utilius solvendi pleraque Problemata  
 Calculatoria, præsertim in Doctrina Triangulorum, citra  
 Multiplicationis, Divisionis, Radicumque extractio-  
 nis, in Numeris prolixis, labore mole-  
 stissimis,  
 A D  
 illustriss. Principem & Dominum,  
 Dn. PHILIPPUM  
 Landgravium Hassæ, &c.  
 Cum Privilegio Authoris Cæsareo.  
 MARPURGI,  
 Excusæ Typis CASPARIS CHEMLINI,  
 c l o l o c x x i v .

LOGARITHMORVM 335

ARCUS Circuli eorum differentiis	SINUS seu Numeri absoluti	Partes sexagesimas quartas	LOGARITHMI eum differentiis	Partes sexagesimas
3. 55			208. 12	
28. 45. 3	48100.00	11. 52. 38	73188. 80 →	28. 52
3. 56			207. 68	
28. 48. 59	48200.00	11. 54. 5	72981. 12	28. 53
3. 57			207. 25	
28. 52. 54	48300.00	11. 55. 31	72773. 87	28. 59
3. 58			206. 85	
28. 56. 50	48400.00	11. 56. 58	72567. 04	29. 2
3. 59			206. 40	
29. 0. 45	48500.00	11. 58. 24	72360. 64	29. 6
3. 59			205. 97	
29. 4. 41	48600.00	11. 59. 50	72154. 67	29. 10
3. 59			205. 55	
29. 8. 37	48700.00	11. 41. 17	71949. 12	29. 13
3. 59			205. 13	
29. 12. 53	48800.00	11. 42. 43	71743. 99	29. 17
3. 59			204. 71	
29. 16. 30	48900.00	11. 44. 10	71539. 28	29. 20
3. 59			204. 29	
29. 20. 26	49000.00	11. 45. 36	71334. 99	29. 24
3. 59			203. 87	
29. 24. 23	49100.00	11. 47. 2	71131. 12	29. 28
3. 59			203. 46	
29. 28. 20	49200.00	11. 48. 29	70927. 66	29. 31
3. 59			203. 05	
29. 32. 17	49300.00	11. 49. 55	70724. 61 →	29. 35
3. 59			202. 64	
29. 36. 15	49400.00	11. 51. 22	70521. 98	29. 38
3. 59			202. 23	
29. 40. 12	49500.00	11. 52. 48	70319. 75 →	29. 42
3. 59			201. 81	
29. 44. 9	49600.00	11. 54. 14	70117. 94	29. 46
3. 59			201. 41	
29. 48. 7	49700.00	11. 55. 41	69916. 53	29. 49
3. 59			201. 01	
29. 52. 4	49800.00	11. 57. 7	69715. 52	29. 53
3. 59			200. 60	
29. 56. 2	49900.00	11. 58. 34	69514. 92	29. 56
3. 59			200. 20	
30. 0. 0	50000.00	12. 0. 0	69314. 72	30. 0
3. 59			199. 80	
30. 3. 58	50100.00	12. 1. 26	69114. 92	30. 4
3. 59			199. 40	
30. 7. 57	50200.00	12. 2. 53	68915. 52	30. 7
3. 59			199. 01	
30. 11. 55	50300.00	12. 4. 19	68716. 51 →	30. 11
3. 59			198. 61	
30. 15. 54	50400.00	12. 5. 46	68517. 90 →	30. 14
3. 59			198. 21	
30. 19. 53	50500.00	12. 7. 12	68319. 69	30. 18
3. 59			197. 81	
30. 23. 52	50600.00	12. 8. 38	68121. 86 →	30. 22
3. 59			197. 41	
30. 27. 52	50700.00	12. 10. 5	67924. 43	30. 25
3. 59			197. 01	
30. 31. 51	50800.00	12. 11. 31	67727. 39	30. 29
3. 59			196. 61	
30. 35. 51	50900.00	12. 12. 58	67530. 75	30. 32
3. 59			196. 21	
30. 39. 51	51000.00	12. 14. 24	67334. 46	30. 36
3. 59			195. 81	

Aus Lit 19

Noch eindeutiger zur praktischen Nutzung in der Astronomie sind die von Kepler 1627 herausgegebenen "Rudolphinischen Tafeln". Sie sind nicht nur mit einer Reihe von Erklärungen und Anleitungen (120 Seiten) gefüllt, sondern enthalten auch eine große Anzahl von astronomischen Tabellen (119 Seiten). Die logarithmischen Tafeln sind in der gleichen Weise aufgebaut wie die in der Chilias Logarithmorum.

T A B U L Æ  
**RUDOLPHINÆ.**  
 QUIBVS ASTRONOMICÆ SCIENTIÆ, TEMPO-  
 rum longinquitate collectæ RESTAURATIO continetur  
 A Phœnice illo Astronomorum  
**T Y C H O N E**

Ex Illustri & Generoso BRAHORIUM in Regno DANICÆ  
 famulatus octiduo Equites,  
 PRIMVM ANIMO CONCEPTA ET DESTINATA ANNO  
 CHRISTI MDCXIV: EXINDE OBSERVATIONIBUS SIDERVM ACCURA-  
 TISSIMIS, POST ANNUM TRICESIMO MDCXXII, QUO ET DUBIO CASTOPERIE  
 CONSTELLATIONE NOVVM PERSEÏDÆ, AB EO ADPACTAS VARIOSQUE STERNOS, COM HAR-  
 DIVISIONUM LIBRARIIS INGENUOSITER TRINISQUE INGLESISSIMO, OCCIDENTIBUS ETIAM TABULIS FRIDERICI II. DANICÆ  
 REGIS, REGALI MAGNIFICENTIA DIGNIT, EXACTE PER ANNO MDCXXV præstitum in Italia fecit. Suscepit Hæc  
 Hæc, & CÆCILIA ANTONIO, in hoc usus fundavit extraxit:  
 TANDEM TRADIDITÆ TYPICÆ GRÆCÆ LINGVÆ, IN REGE APLAM ET  
 QUINO RUDOLPHI IIII, ANNO MDC.

TABULAS IPSAS, JAM ET MUNCUPATAS, ET AFFECTAS, SED  
 NOTÆ ASTRONOMICÆ ANNO MDCI DESERTAS,  
 TUSU ET STIPENDIIS PREPOS STRUAM IMPPP.  
 RUDOLPHI, MATTHIÆ, FERDINANDI  
 ANNI ENTIBVS HARIBIDVS BRAHEANIS, EX FUNDAMENTIS  
 OBSERVATIONUM RUDOLPHI, AD CONSUMMAM PERFECTIORUM ESTIMULATIONUM, CONTINUAS MULTITUDINEM ANNO  
 DECALATIONIBUS & COMPLETIONIBUS QUINQUE TABULAS, IDEMQUE CONTINENTIBUS, LINGVÆ  
 SUPERIORI AUSTRIÆ, MATHEMATICI, ETIAM III. PROTONOTARIUM ADIUTUM, PREFECTI, ALIJSQUE,  
 ADIUVANTIBUS, ET CÆCILIA ANTONIO, IN HOC USUS FUNDAVIT EXTRAXIT.

**IOANNES KEPLERUS.**

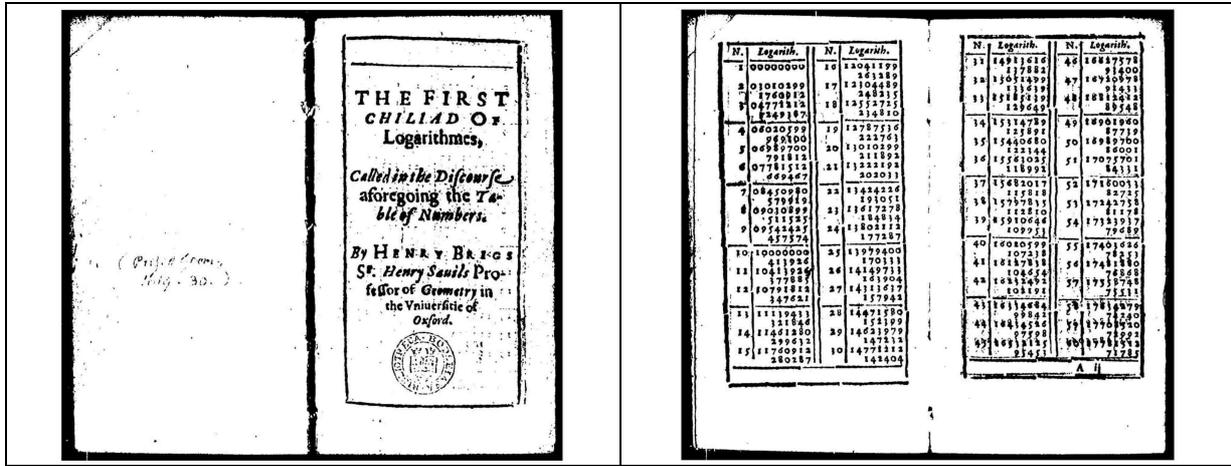
TYCHONI PRIMVM A RUDOLPHO II. Imp. adjunctus calculi minister; indeq;  
 ritum ordines Impp. Mathematicus:  
 Qui idem de specialis mandato FERDINANDI II. IMP.  
 secretarius mathematicus, Mathematicus:  
 Opus hoc ad usus præsentium & posteritatis, typis numericis proprijs, cæteris  
 Et prælo JONÆ SAURIJ, Reip. Ulmanæ Typographi, in publicam  
 exitum, Et Typographi operæ ULMÆ curatur affuit.

Cum Privilegio Imp. & Regum Rerumque publ. vno TYCHONI ejusq; HæREDIBUS  
 & SPECIALI IMPERATORIO, Ipsi KEPLERO concessis, ad ANNO MDC.  
 ANNO M D C X X V I I .

6 *Tabularum Rudolph* **LOGARITH.**

Angulus Minuti Secundi Terti	Sinus Tangentis Secantis Cotangentis Cotangentis Cotangentis	Logarithmi Cotangentis Cotangentis Cotangentis	Logarithmi Cotangentis Cotangentis Cotangentis	Logarithmi Cotangentis Cotangentis Cotangentis	Logarithmi Cotangentis Cotangentis Cotangentis	Logarithmi Cotangentis Cotangentis Cotangentis
1. 0. 0	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 0. 1	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 0. 2	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 0. 3	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 0. 4	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 0. 5	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 0. 6	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 0. 7	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 0. 8	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 0. 9	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 1. 0	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 1. 1	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 1. 2	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 1. 3	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 1. 4	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 1. 5	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 1. 6	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 1. 7	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 1. 8	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 1. 9	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 2. 0	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 2. 1	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 2. 2	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 2. 3	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 2. 4	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 2. 5	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 2. 6	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 2. 7	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 2. 8	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 2. 9	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 3. 0	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 3. 1	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 3. 2	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 3. 3	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 3. 4	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 3. 5	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 3. 6	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 3. 7	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 3. 8	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 3. 9	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 4. 0	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 4. 1	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 4. 2	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 4. 3	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 4. 4	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 4. 5	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 4. 6	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 4. 7	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 4. 8	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 4. 9	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 5. 0	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 5. 1	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 5. 2	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 5. 3	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 5. 4	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 5. 5	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 5. 6	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 5. 7	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 5. 8	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 5. 9	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 6. 0	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 6. 1	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 6. 2	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 6. 3	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 6. 4	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 6. 5	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 6. 6	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000
1. 6. 7	8.996647	10.000000	10.000000	10.000000	10.000000	10.

Henry Briggs (1561 - 1631), Professor der Geometrie am Gresham College in London, traf sich einige Male mit John Napier und hat ihm aus praktischen Gründen für die Weiterentwicklung der Logarithmen die Basis 10 für deren Berechnung vorgeschlagen und die ersten derartig berechneten Logarithmen der Zahlen (und nicht der Sinuse) in den "First Chiliads of Logarithms" in lateinischer Version 1617 veröffentlicht.



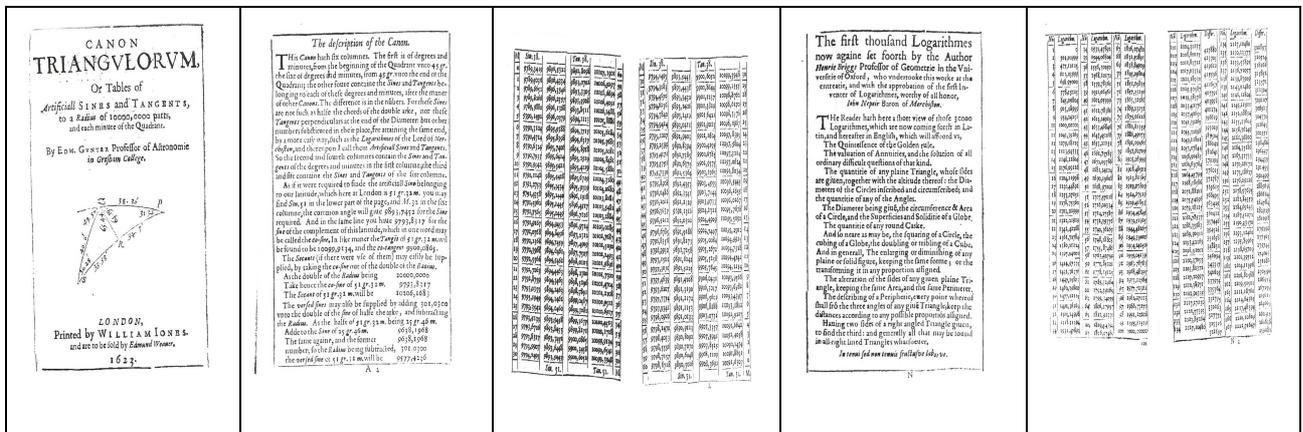
Von 1617; erschienen als Anhang zu Edmund Gunter's Canon Triangulorum 1620 [Henderson # 17.1]

Noch bevor Briggs seine Logarithmen veröffentlicht hatte, kam Edmund Gunter mit seinem Canaan heraus und hat damit als erster die trigonometrischen Werte Sinus und Tangens auf der Basis **dekadischer/Briggs'scher Logarithmen** veröffentlicht. Die folgenden Texte stammen aus Henderson <sup>17</sup> und beschreiben die genannten Tafeln von Briggs und Gunter:

*Henderson # 17.1. Gunter, Edmund; Canon Triangulorum, or Tables of Artificiall Sines and Tangents to a Radius of 100.000.000 parts, and each minute of the Quadrant. London, 1623 W. Jones. (4°.)*

*In 1620 Edmund Gunter (1581 - 1626), Professor of Astronomy in Gresham College, first issued his Canon. At the end of the Canon in an address to the Reader he recommends the addition to his Canon of the logarithms of his friend and colleague Henry Briggs. This recommendation probably accounts for the First Chiliad of 1617 being found in two out of three cases bound with the Canon Triangulorum. In his edition of 1623 Gunter prints the first chiliad to 8 decimals with characteristic preceding without decimal point. The logarithms occupy 151/2 pages in three columns: (i) number, (ii) logarithms in full, (iii) differentes in mid line.*

*The title runs: "The first thousand Logarithmes now againe set forth by the Author Henrie Briggs, Professor of Geometrie in the Vniuersitie of Oxford, who undertooke this worke at the entreatie and with the approbation of the first Inuenter of Logarithmes, worthy of all honor, John Nepeir Baron Merchiston. ! The Reader hatte here a short view of Chose 30,000 Logarithmes, which are now coming forth in Latin, and hereafter in English, which will afford vs... [states uses of logarithms and concludes with Briggs's motto, In tenui, etc.]."*



Die Abbildungen entstammen dem Exemplar der Henry E. Huntington Library.

Hinweis: die log sin Werte stellen die Komplemente zu 10 dar, müssen also von 10 abgezogen werden, um den positiven Log-Wert zu erhalten. In der Abbildung ganz rechts sind die dekadischen Logarithmen der ganzen Zahlen zusammen mit den Kennzahlen angegeben. Ausser den abgebildeten Texten enthält der Canon keine weiteren Erläuterungen oder Beispiele. Bei dem Dreieck auf der Titelseite handelt es sich um ein Poldreieck mit den Eckpunkten PZS und der Seite ZR, die das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke teilt.

In diesem Zusammenhang sei auf die "Gunter Scale" hingewiesen, ein Lineal mit logarithmischen Skalen, das zusammen mit einem Zirkel Multiplikationen und Divisionen zu Addition bzw. Subtraktion vereinfachte. Über diese "Gunter Scales", die hauptsächlich in der Navigation der Seefahrer zum Einsatz kam, hat Otto van Poelje ausführlich im Journal der Oughtred Society berichtet<sup>22</sup>.

Hier nun die Ausführungen von Henderson zur "Arithmetica Logarithmica" von Henry Briggs:

*Henderson # 18.0. Briggs, Henry. Arithmetica Logarithmica sive Logarithmorum Chiliades Triginta, Pro numeris naturali serie crescentibus ab unitate ad 20,000: et a 90,000 ad 100,000. Quorum ope multa perficiuntur Arithmetica problemata et Geometrica. Hos Numeros Primus Invenit Clarissimus Vir Johannes Neperus Baro Merchistonii; eos autem ex eiusdem sententia mutavit, eorumque ortum et usum illustravit Henricus Briggius in celeberrima Academia Oxoniensi Geometriae professor Savilianus. Deus Nobis Usuram Vitae Dedit Et Ingenii, Tanquam Pecuniae, Nulla Praestituta Die. Londoni, Excudebat, Gulielmus Iones. 1624. (Folio.)*

.....

*The Arithmetica Logarithmica is the first extensive work on logarithms of the decimal system. In 88 pages of text Briggs explains the theory of logarithms, methods of calculation of the table, and applications of the table to trigonometrical problems. The table exhibits the common logarithms (i.e. to the base 10) to 14 decimal places with the characteristics of all numbers from 1 to 20,000 and from 90,001 to 100,000. The arrangement is direct, with three sets of two columns on each page, and the first differences are given between the tabular results ("interscript" differences). The logarithms of 100 numbers are shown on each page, the last entry in the first and second sets of columns being repeated in the second and third respectively. Lines are ruled after every third number, and these help the computer in taking out logarithms. For those computers, who require logarithms to 12 or 14 places and have access to this table, we may point out that up to 3000 the fourth differences have to be taken into account when interpolating, but from 3000 to 20,000 the fourth differences are negligible. Near the end of this range the third differences become small, and near 20,000 they are of the order 10. In the range from 90,000 to 100,000 the third differences are zero... ".....*

**Obwohl die Logarithmen der Zahlen zwischen 20.000 und 90.000 fehlen, ist diese  
*Arithmetica Logarithmica*  
als der Ausgangspunkt ALLER zukünftigen Logarithmentafeln mit dekadischen Logarithmen zu sehen !**

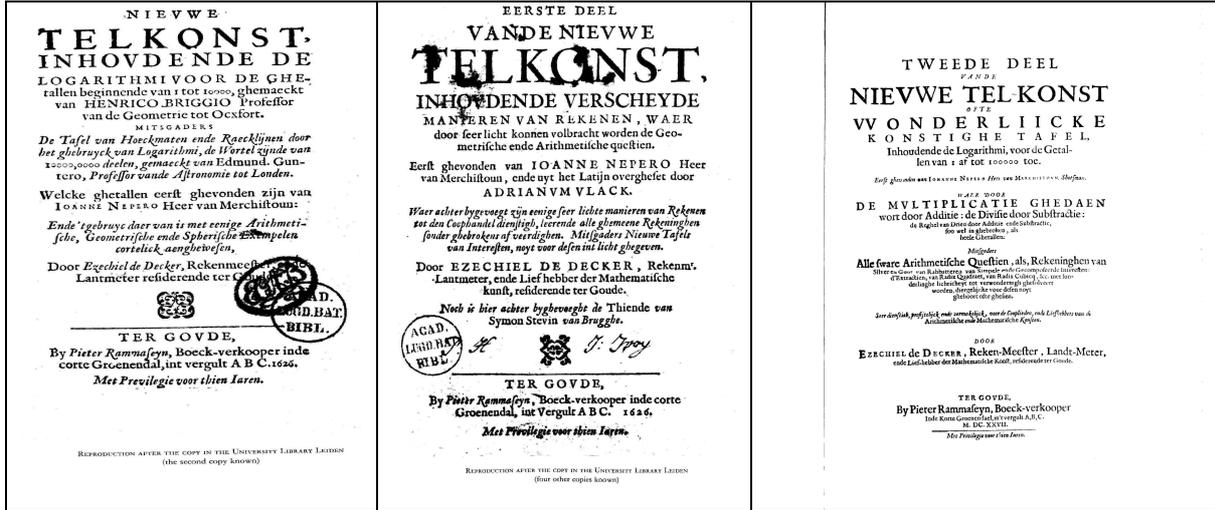
Die restlichen 70.000 Logarithmen wurden von dem holländischen Buchhändler Adrian Vlacq (1600 - 1667) nachgereicht. Berechnet wurden sie von seinem Landsmann Ezechiel de Decker (1603 -1647, Feldmesser und Mathematiker), [Henderson # 21, # 22 und #22.1]. Darauf weist insbesondere der erst 1920 aufgefundene "Tweede Teel van de Nieuwe Tel-konst... M.DC.XXVII" hin, in der die Logarithmen der ganzen Zahlen auf 10 Stellen wiedergegeben sind. Beispiele in diesem Band beziehen sich meist auf die Zinsrechnung.

Auf die besonderen Beziehungen zwischen de Decker und Vlacq ist Otto van Poelje in seinem Artikel "Adriaen Vlacq and Ezechiel de Decker: Dutch Contributors to the Early Tables of Briggsian Logarithms" eingegangen<sup>23</sup>.

Durch Edmund Wingate (1596 ? - 1656; Mathematiker) und Denis Henrion (? - 1642; Mathematikprofessor) waren die Brigg'schen Logarithmen inzwischen (1625 bzw. 1626) nach Frankreich gekommen.

<sup>22</sup> van Poelje, Otto E.; Early Drawings of Logarithmic Scales by Gunter and Wingate; Journal of the Oughtred Society Vol 17 No1 Page 5 (2008)

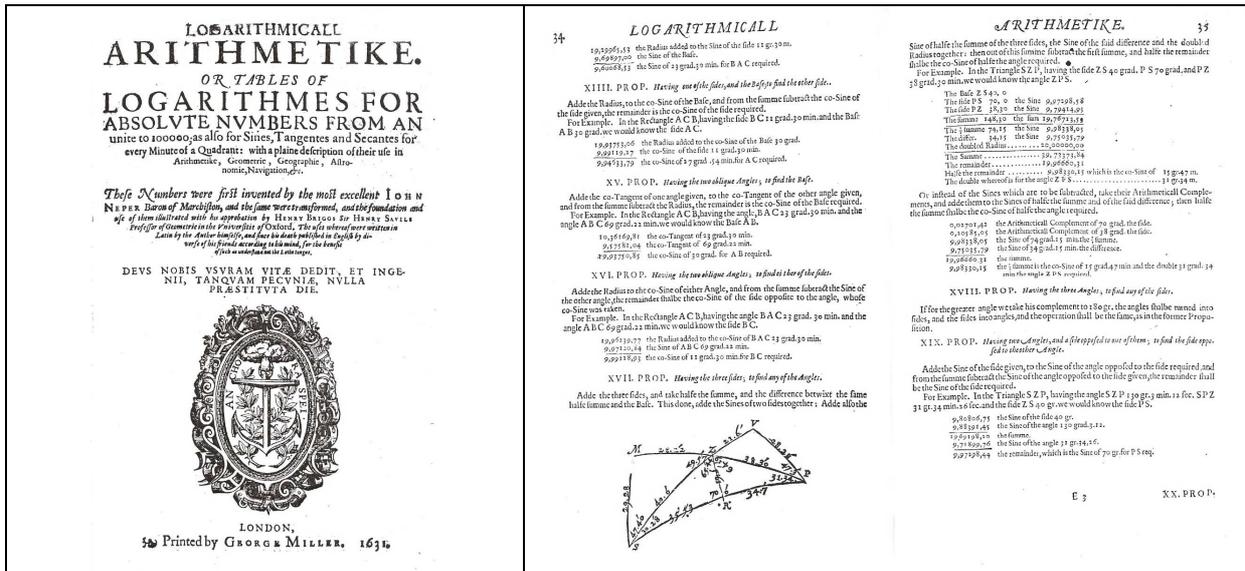
<sup>23</sup> van Poelje, Otto E.; Journal of the Oughtred Society Vol 14 No1 Page 30 (2005)



1628 kam es dann zur Herausgabe der für die Zukunft der Logarithmentafeln bedeutenden 2. Ausgabe der "Arithmetica Logarithmica" durch Adrian Vlacq, in der sowohl die Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 - 100.000 wie auch die der trigonometrischen Werte sin, tan und sec auf 10 Stellen dargestellt sind. In diesem Werk sind auf 18 Seiten die Entstehung der Logarithmen und Anwendungsbeispiele dargestellt, allerdings ohne besonders auf astronomische Aufgaben einzugehen.

Dies erfolgte sehr ausführlich erst in einer Ausgabe "Logarithmicall Arithmetike..." von 1631 [Henderson # 26], die von George Miller in London herausgegeben wurde, ohne den Namen Vlacq zu erwähnen, obwohl dessen "Arithmetica Logarithmica" offensichtlich Pate gestanden hat. Henderson sagt dazu: "It is remarkable, however, that there is no mention of Vlacq on the title-page; there certainly ought to have been some reference to him. The omission may be accounted for by the fact that some of Briggs's friends were annoyed by Vlacq, because he had published his Arithmetica Logarithmica without consulting Briggs." Und weiter sagt Henderson: "The main table is preceded by a 'Table of latitudes'. This type of table is generally described as a 'Table of Meridional Parts', but in this case the entries are given in an unusual way. The Meridional Parts are exhibited for every minute to 88° to 3 decimal places of a degree, e.g. 30° -> 31,472. The meridional parts are usually shown in terms of minutes."

Das Gesamtwerk umfasst 415 Seiten, von denen 336 den Logarithmen der Numeri von 1 bis 100.000 gewidmet sind und 45 Seiten den trigonometrischen Logarithmen. Die restlichen Seiten enthalten Beispielberechnungen mit einem eigenen Kapitel X für sphärische Dreiecke, Kapitel XII für astronomische Aufgaben und Kapitel XIV für die Navigation, an die sich die Meridional Parts anschliessen.



**Logarithmicall Arithmetike von 1631: Log 2 und Log sin 30**

Um das Werk in Frankreich bekannt zu machen, gab es auch Ausgaben von 1628 mit französischem Titelblatt-Text.

In Deutschland hat sich der Ulmer Johannes Faulhaber (1580 - 1635) intensiver mit den Briggs'schen Logarithmen auseinandergesetzt. In seiner "Ingenieurs-Schul Erster Theyl: Darinnen durch den Canonem Logarithmoricum all Planische Triangel... zu solviren, gelährd wird..." 1630 die Briggs'schen Logarithmen nach Deutschland gebracht und mit zahlreichen Beispielen deren Einsatzmöglichkeiten populär gemacht. Dankenswerterweise konnte ich mit Hilfe von Kurt Hawlitschek<sup>24</sup> eine Kopie der zweiten Auflage seiner "Ingenieurs-Schul" von 1637 aus dem Bestand des Ulmer Stadtarchives erhalten, aus der die folgenden Abbildungen mit einem geographisch-astronomischen Rechenbeispiel (ursprünglich von Pitiscus) stammen.

**INGENIEURS-SCHUL**  
Erster Theyl:  
Darinnen durch den Canonem Logarithmoricum alle Planische Triangel zur fortification, oder Architectura Militari, Optica, Geodesia, Geometria, Sec. gar leichtlich und bekandt zu solviren, gelehrd wirdt/darinnen die Doctrina Triangulorum Sphericorum zur Geographia, Gnomonica, Astronomia gelehrt, auch zu sehen  
Vus Adriano Ulaq, Henrico Briggio, Nepero, Pitisco, Barrotero und andern hochberühmten Auhornern gezogen, und als der besten Craft und Xenionem Pien Compendium gebewerd  
Mit angezeigten Miraculischen Kunst-Quationen, und ganz neuen Erfindungen der geistlichen Viceroye gezeiget  
Dem gemeinen Luten zum besten / auch allen Kunst-Liebhabern zu gefallen in Teut gegeben  
Durch Johann Faulhaber Ingenieur und Burggen in Ulm.  
Anjeho zum andernmal aufgelegt.  
Tüthenberg /  
In Verlegung Wolffgang Endters.  
M. DC. XXXVII.

**Problemata Geographica quae Pitisco**  
1631.

**1. Operatio.**  
Winnig von G. B. F. ein perpendicularis sin 1000000  
10.000000  
7.24. sinus  
7.24. sinus  
9.7892183  
9.1107726  
9.7892183  
10.000000  
8.8937909  
4.37. G. H.

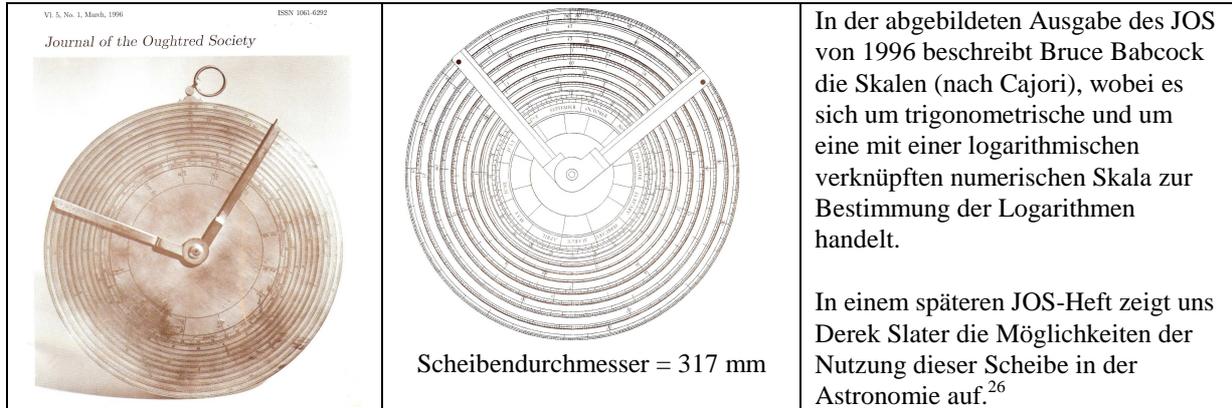
**2. Operatio.**  
10.000000  
7.24. sinus  
9.1107726  
9.7892183  
10.000000  
8.8937909  
4.37. G. H.

**3. Operatio.**  
10.000000  
7.24. sinus  
9.1107726  
9.7892183  
10.000000  
8.8937909  
4.37. G. H.

**4. Operatio.**  
10.000000  
7.24. sinus  
9.1107726  
9.7892183  
10.000000  
8.8937909  
4.37. G. H.

<sup>24</sup> Hawlitschek, Kurt; Johann Faulhaber (1580 - 1635) - Eine Blütezeit der mathematischen Wissenschaften in Ulm, Stadtbibliothek Ulm 1995

Nachdem die Briggs'schen Logarithmen den Anwendermarkt erobert hatten, liess ca. 1630 William Oughtred (1555 - 1627), der Erfinder des Rechenschiebers<sup>25</sup> die unten abgebildete Scheibe herstellen. William Oughtred war Pfarrer und beschäftigte sich nebenbei intensiv mit der Mathematik und der Astronomie.

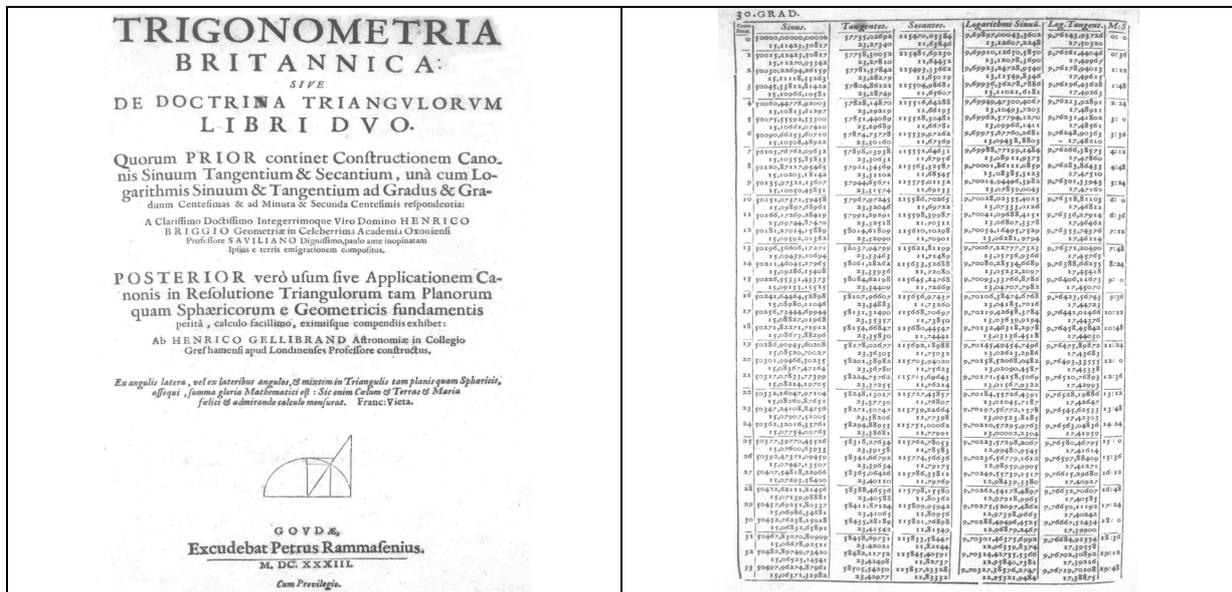


In der abgebildeten Ausgabe des JOS von 1996 beschreibt Bruce Babcock die Skalen (nach Cajori), wobei es sich um trigonometrische und um eine mit einer logarithmischen verknüpften numerischen Skala zur Bestimmung der Logarithmen handelt.

In einem späteren JOS-Heft zeigt uns Derek Slater die Möglichkeiten der Nutzung dieser Scheibe in der Astronomie auf.<sup>26</sup>

Sicher sind noch eine große Anzahl weiterer Autoren und Tafelberechner zu benennen, die sich um die anfängliche Verbreitung der Logarithmen bis etwa 1700 verdient gemacht haben und von Henderson besprochen werden. Allerdings basieren die meisten dieser Tafeln auf den Arbeiten von de Decker-Vlacq, z. T. durch Weglassen der letzten Ziffern. Erwähnt sei noch stellvertretend Ludwig Frobenius mit seiner "Clavis Universi Trigonometrica..." von 1634 mit vielen systematischen Berechnungsbeispielen aus der sphärischen Trigonometrie, auf die in meiner Arbeit zur Prosthaphärese<sup>13</sup> näher eingegangen wurde.

1633 vollendete Henry Gellibrand (1597 - 1637; Astronomieprofessor in London) die von Briggs begonnene "Trigonometria Britannica", in der die Sinusse auf 15 Stellen, deren Logarithmen auf 14 Stellen und die Tangens und Secans und deren Logarithmen auf 10 Stellen dargestellt werden.



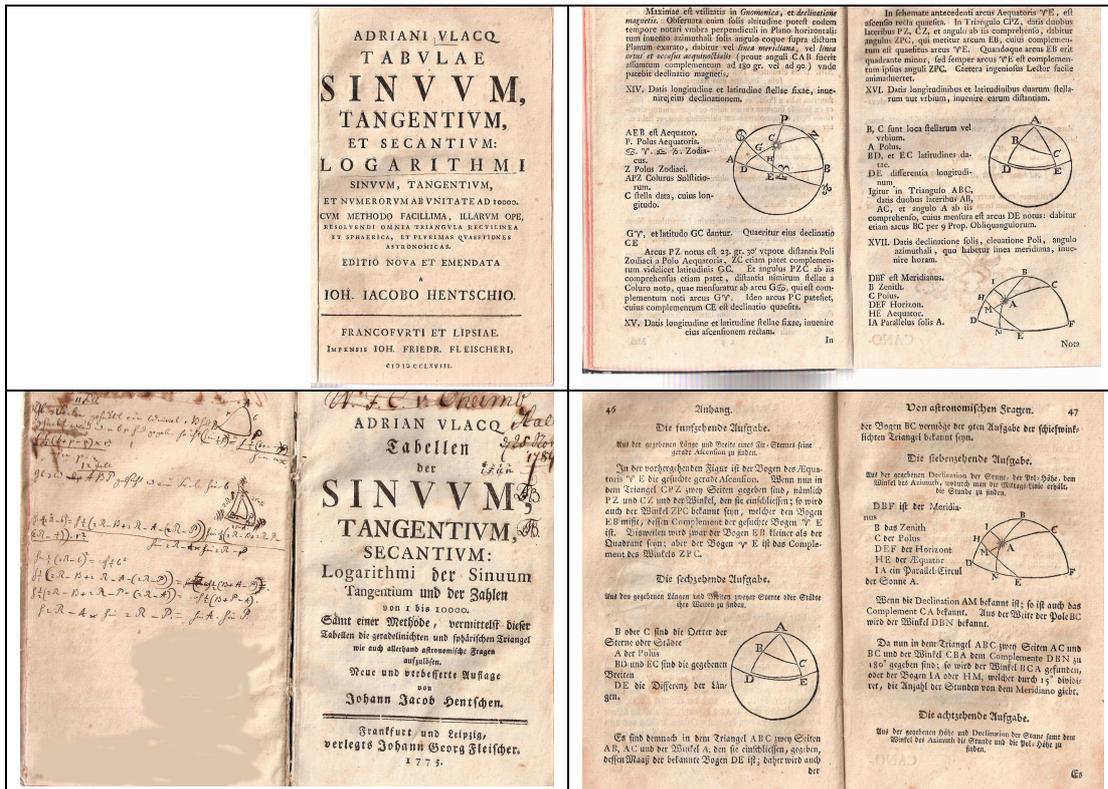
In den Folgejahren haben sich auf dem europäischen Kontinent besonders die **kleinen** Tafeln von Adrian Vlacq "Tabulae Sinuum, Tangentium et Secantium et Logarithmorum" durchgesetzt, von denen Tausende zwischen 1651 und 1821 (über 150 Jahre hinweg!) in lateinischer, französischer und deutscher Ausgabe erschienen sind<sup>22</sup>. Die Tafeln waren sehr handlich, da die Stellenzahl sowohl der numerischen wie auch der trigonometrischen Logarithmen auf 7 reduziert war, was den damaligen wissenschaftlichen Ansprüchen für die Berechnungen, auch

<sup>25</sup> Kühn, Klaus; William Oughtred - the Inventor of the Slide Rule; Slide Rule Gazette (4) p. 75- 84, (2003)  
<sup>26</sup> Slater, Derek; The Astronomical Scales of Oughtred's Calculator; JOS Vol 6 (1) Seite 16 -17 (1997)

denen der Astronomen, genügte. Ausserdem enthielten sie gute einführende Erklärungen und viele Berechnungsbeispiele aus der Astronomie (z.B. insgesamt 56 Seiten in der lateinischen Ausgabe von 1670).

In Frankreich erschien 1685 eine Tafel von J. Ozanam [Henderson # 52], die im Aufbau der von Vlacq entspricht. Allerdings ist Vlacq nicht erwähnt, das erfolgt erst in den späteren Ausgaben von 1697 und 1720 [als Vlacq's Bekanntheitsgrad bereits groß war].

Inhaltlich hat sich an den Vlacq'schen Tafeln bis zur Ausgabe von 1808 nicht viel geändert, wohl weil sich die Ausführungen bewährt hatten. Hier sind die Titel und einige Aufgaben aus der lateinischen Ausgabe von 1768 sowie der deutschen Ausgabe von 1775 abgebildet - siehe auch die Aufgaben bei Napier 1614.



Dass sich die Tafeln von Vlacq hauptsächlich an die Astronomen wendeten, zeigen folgende Abbildungen:



Titelseite einer Ausgabe von 1670 mit Motiven aus der Astronomie

Einer Tafel von 1681 zugebundene Synopsis zum Thema Astronomie

---

Zu den **Antilogarithmen** gehören die "Aritmetische und Geometrische Progress Tabulen sambt gründlichem unterricht wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen und verstanden werden soll..." von Jobst Bürgi (1552 - 1632; Uhrmacher, Instrumentenbauer und Astronom), der seine Tafeln 1620 in der "Alten Stadt Prag bei Paul Sessen, der Löblichen Universitet Buchdruckern" herausbrachte. Bürgi wiederum hatte einen eigenen Weg zur Bestimmung der Logarithmen gewählt, der sich von denen der anderen unterschied.

In dieser Ausgabe fehlen allerdings sowohl Beschreibungen wie auch Beispielrechnungen, so dass sich diese Tafeln nicht durchsetzen konnten. Auch in dem erst später (1856) aufgefundenen "Gründlichem Unterricht" waren keine Aufgaben aus der Astronomie enthalten<sup>27</sup>.

---

<sup>27</sup> Lutstorf, Heinz und Walter, Max; Jost Bürgi's Progress Tabulen; ETH Bibliothek Zürich 1992

## 6 Die Entwicklung der Logarithmentafeln und deren Inhalte

Das 18. Jahrhundert brachte erhebliche Änderungen und Neuerungen in die Ausgaben der Logarithmentafeln. Besonders ihr Umfang wuchs dadurch erheblich, so dass manche Tafeln auf zwei Bände aufgeteilt oder in größeren Formaten (Folio) herausgegeben wurden.

Beginnen wir mit der im Jahr 1700 von Leonhard Christoph Sturm (1669-1719; Mathematikprofessor und Baumeister in Wolfenbüttel) herausgegebenen Tafel von Aegidius Strauch (? - ?): "Tabellen der Sinuum Tangentium Logarithmorum, und zu der ganzen Mathesi...." [Henderson #58]. Nach einer Einleitung mit Rechenbeispielen auf 46 Seiten folgen die 7stelligen trigonometrischen Logarithmen angelehnt an Vlacq auf den Seiten 1 -181, gefolgt von 7stelligen Logarithmen der Zahlen 0 - 10.000 auf den Seiten 182 - 256. Daran schliessen sich astronomische Tafeln in einer "Tabulae Sphaerae et Theoricae" auf weiteren 275 ! Seiten an, was auf den Fokus Astronomie hinweist.

Bereits 1740 veröffentlichte Benjamin Martin [Henderson # 68] in London in der dreiteiligen "*Logarithmologia or the Whole Doctrine of Logarithms, Common and Logistical, in Theory and Practice*" einen geschichtlichen Abriss zu den Logarithmen. Darin stellt er auf 284 Seiten deren Geschichte (Teil I), theoretische Überlegungen und Anwendungsbeispiele aus allen Bereichen des Lebens (Teil II) zusammen. Wiederum spielen Trigonometrie und Astronomie bei den Beispielen eine wichtige Rolle. Am Ende des Teils II (Teil III) werden die Logarithmen der Zahlen 1 - 10000 sowie der sinus und tangens wie auch die logistischen Logarithmen<sup>28</sup> tabelliert.

Die Reihe der Briggs'schen Logarithmen setzt sich fort mit den "Mathematical Tables" von Henry Sherwin (?-1740), deren erste 1705 [Henderson # 61] erschienen ist. Die wichtigste, weil die korrekteste, Ausgabe ist die dritte von 1741: "*Sherwin's Mathematical Tables contrived after the most comprehensive method: containing, Dr. Wallis's Account of Logarithms, Dr. Halley's and Mr. Sharp's Ways of constructing them; with Dr. Newton's contraction of Briggs's Logarithms, viz. A Table of Logarithms of the numbers from 1 to 101000, with the means to find readily the Logarithm of any number, and the number of any Logarithm, to seven places of Figures: and tables of natural and logarithmic sines. Tangents, Secants, and Versed-Sines, to every minute of the Quadrant with the EXPLICATION and USE prefix'd. The Third Edition. Carefully revised and corrected by WILLIAM GARDINER. London: Printed for William Mount and Thomas Page at the Postern on Tower-Hill, M,DCC,XLI*".

In dieser Titelei stecken schon all die Inhalte der Tables drin, die insgesamt über 100 Seiten umfassen und mit vielen Rechenbeispielen aus der Astronomie und anderen Bereichen (z.B. kaufmännischen) gefüllt sind. Die Tables tragen die Handschrift von W. Gardiner, der nach dem Tode von Sherwin die Aufgaben des Herausgebers übernahm. Interessanterweise finden sich darin die natürlichen und logarithmischen Werte der "Versed-Sines" (Sinus Versus, versin oder vers), die gerne in der Astronomie zur Anwendung kamen. Bemerkenswert sind die 61stelligen Logarithmen, die Abraham Sharp beigesteuert hat.

William Gardiner gab 1742 seine eigenen Tafeln [Henderson # 71] heraus, die auch 20stellige Logarithmen enthielten. Diese Tafeln wurden 1770 in französischer Sprache herausgegeben und 1783 von Francois Callet (1744 - 1798, Mathematiker) übernommen. Mit einer ausführlichen Einleitung und zahlreichen Rechenbeispielen, auch aus Astronomie und Navigation, (insgesamt 64 eng bedruckten Seiten) kamen sie bei Firmin Didot in Paris, ohne 61stellige Logarithmen, heraus [Henderson # 85]. Dieser Band mündete in das 2bändige Werk, das F. Callet 1795 (AN 3<sup>e</sup>) ebenfalls bei Firmin Didot in Paris herausgab: "*Tables Portatives de Logarithmes contenant les Logarithmes des Nombres, depuis 1 jusqu'a 108000; les Logarithmes des Sinus et Tangentes, de seconde en seconde pour les cinq degres, de dix en dix secondes pour tous les degres du quart dué cercle; Et, suivant la nouvelle Division Centesimale, de dix-millieme en dix-millieme. Precedees d'un discours preliminaire sur l'explication, l'usage et la sommation des Logarithmes, et sur leur application a l'Astronomie, a la Navigation, a la Geometrie-pratique, et aux Calculs d'Interets. Suivies de nouvelles tables plus approchees, et de plusieurs autres utiles a la recherche des longitudes en mer, etc.*" [Henderson # 98] In dieser Ausgabe sind im ersten Band 61stellige Brigg'sche und 48stellige hyperbolische (Napier'sche) Logarithmen der Zahlen 1 - 1000 (Tafel I) aufgeführt. In stereotypisierter Form wurden diese Tafeln 1bändig ca. 100 Jahre (Band von 1890 ist bekannt) lang herausgegeben.

<sup>28</sup> Logistische Logarithmen stellen für den Astronomen eine Rechenvereinfachung dar, da sie sich auf Winkelminuten bzw. -sekunden beziehen. (Eine Arbeit des Autors zu den verschiedenen Logarithmentypen ist in Vorbereitung.)

Bereits 1782 gab es eine italienische Ausgabe der Gardiner Tafeln, die 1796 neu aufgelegt wurden und als "Tavole Logarithmiche del Signor Gardiner, corrette da molti Errori" mit 36 Seiten Einleitung von Stanislaw Canova & Gaetano Del-Ricco herausgegeben wurden [Henderson # 84]. Die 1827 in Florenz, Italien erschienenen Tabellen "Tavole Logarithmiche" von Giovanni Inghirami basieren auch auf den Tafeln von W. Gardiner und haben 88 Seiten Einleitung und Beispielberechnungen aus der Trigonometrie.

Die Zeit von 1770 bis 1800 war von einer Reihe von Neuauflagen logarithmischer Tafeln in England, Frankreich und Deutschland von großer Bedeutung geprägt. In diese Zeit fiel 1793 die Einführung des dezimalmetrischen Systems in Frankreich.

Johann Carl Schulze (1749 - 1790, Astronom, Mathematiker, Schüler von Lambert und Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Berlin) begründet die Herausgabe seiner 2 Bände [Henderson # 13] "Neue und Erweiterte Sammlung Logarithmischer, Trigonometrischer und anderer zum Gebrauche der Mathematik unentbehrlichen Tafeln" 1778 in Berlin in der Vorrede mit folgenden Worten:

*Ein jeder, welcher von der Mathematik Gebrauch macht, muß bereits seit langer Zeit den Mangel empfinden, welchen Deutschland an richtigen und vollständigen mathematischen Tafeln hat.*

*Die Sherwinsche Ausgabe der Mathematical Tables ist jetzt in Deutschland schwer zu erhalten, und wird, wo sie in Auctionen vorkommt, theuer genug bezahlt; sie ist auch wirklich von allen andern Ausgaben solcher Tafeln, die ich kenne, die richtigste und bequemste.*

*Die nach Gardiners Ausgabe abgedruckte und zu Avignon herausgekommene "Tables de Logarithmes" dienen bloß, wo man mit Logarithmen zu rechnen hat, und können wegen ihres hohen Preises nur von den wenigsten Personen, die sie brauchen, angeschafft werden. Ueberhaupt muß man sich wundern, daß in Deutschland die kleinern Tafeln von Wolf und Vlacq so oft sind aufgelegt worden, ohne an etwas Vollständiges in dieser Sache zu denken.*

*Da ich sehr oft die trigonometrischen Tafeln zur Berechnung unserer Ephemeriden gebraucht habe, so glaube ich, dass niemand diesen Mangel stärker empfunden haben kann, als ich selbst, besonders da bey dergleichen mechanischen Rechnungen öfters mehr Zeit durch bloßes Aufschlagen verlohren gehet, als zur Rechnung selbst erfordert wird. Denn ob ich gleich die Avignoner Ausgabe sowohl als die Sherwinsche besitze, so fand ich dennoch erstere wegen ihres großen Formats zum geschwinden Aufsuchen der Logarithmen, und letztere zum Einschalten höchst unbequem. Dieses veranlasste bey mir den natürlichen Wunsch, so bald als möglich solche Tafeln zu haben, wodurch beide Unbequemlichkeiten sehr verringert würden. Ich suchte daher ein Mittel, durch welches nicht nur die grossen Tafeln in einen engen Raum gebracht werden könnten, sondern auch das Einschalten erleichtert würde. Nun sahe ich wohl, dass ersteres schwerlich zu erhalten sey, wenn ich Tafeln wählte, welche auch nur von zehn zu zehn Secunden durchaus fortgiengen, und dass hingegen letzteres allein vom ersten abhängt.*

*Beides nun zu vermeiden, fiel ich auf den Einfall, die Sinustafel so anzuordnen, dass zwar für die vier ersten und vier letzten Grade die trigonometrischen Linien und ihre zustimmende Logarithmen, weil bey selbigen die Unterschiede gross und ungleich sind, wirklich von zehn zu zehn Secunden fortgiengen, für den übrigen Theil des Quadranten dieselben aber nur von Minute zu Minute nebst den sechsten Theil ihrer Unterschiede berechnet vorkämen. Denn ich bemerkte, dass bereits zu Anfang des vierten Grades hei der Cotangente sowohl als bey den Log. Sinus und Log. Tang. die zweiten Unterschiede ziemlich beständig wurden, weil man, ohne Fehler zu besorgen, die dritten Unterschiede für Nichts rechnen kann. Ich hielt es daher für überflüssig, weiter diese Tafel von zehn zu zehn Secunden auszudehnen, weil man eben so richtig alles finden kann, wenn sie von dort an von Minute zu Minute fortgeht. Der sechste Theil der Unterschiede leistet aber besonders da, wo die zweiten Unterschiede anfangen so klein zu werden, dass sie für Nichts zu rechnen sind, welches in den mehresten Fällen geschiehet, bey nahe eben die Dienste, als hätte man die Tafel durchaus von zehn zu zehn Secunden berechnet. Ich eröffnete hierüber meine Gedanken sowohl den Herren Directoren de la Grange und Sulzer, als den Herren Prof. von Castillon und Lambert und erhielt von allen ihren Beyfall. Bey dieser Gelegenheit machte mir Herr Director de la Grange die Anmerkung, dass es vielleicht noch besser gethan seyn würde, wenn man, statt die trigonometrischen Linien und ihre Logarithmen für Grade, Minuten und Secunden zu geben, dieselbe in Graden und deren tausendste Theile, nach Gellibrand "Trigonometria Britannica" anno 1633 berechnet, lieferte. Ich gestehe, dass ein dergleichen Werk eine ungemeyne Bequemlichkeit und Abkürzung in mathematischen Rechnungen geben müsse, und zeige hiermit dem Publico an, dass dieser Gedanke nicht bloss Gedanke geblieben, sondern dass bereits das meiste in dieser Absicht geschehen ist, und dass die völlige Ausführung dieses grossen Werks allein davon abhängt, wie mein Herr Verleger durch guten Abgang des gegenwärtigen wird aufgemuntert, und der ernstliche Vorschlag, die höchstbeschwerliche Sexagesimalrechnung in bequeme Decimalrechnung zu verwandeln, wird aufgenommen werden. Dem ohngeachtet konnte dieser Gedanke gegenwärtiges Werk nicht hintertreiben, weil der grosse Mangel guter Tafeln dessen Herausgabe unumgänglich erforderte.*

*Da ich mir aber vorzüglich vorgesetzt hatte, die log. und trigon. Tafeln so correct als möglich zu machen, so sahe ich bald ein, dass dies einen treuen Gehülffen erforderte, der eben so gewissenhaft als ich selbst in Aufsuchung der Fehler wäre, und sich keine Mühe verdrissen ließe, verschiedene gute Ausgaben unter einander zu vergleichen, ja sogar die Unterschiede selbst zu prüfen. Da ich nun das Glück gehabt habe, an meinem seeligen Freunde, dem Candidaten der Rechte, Herrn Eisenhardt, dessen große Kenntnisse und Einsichten in der Mathematik seinen frühen Tod sehr bedauern lassen, und dessen Freundschaft ihn bey mir unvergesslich macht, einen würdigen Gehülffen zu finden so erlangte ich eine fehlerreine Handschrift von der Tafel der Sinus, Tangenten &c. mit den sechsten Theilen der Unterschiede berechnet, so wie selbige in gegenwärtiger Sammlung vorkommt. Diese war ich willens mit der Tafel der Logarithmen nach Sherwins Einrichtung zusammen auf vier und zwanzig Bogen abdrucken zu lassen, um nur einigermaassen das Publicum mit bessern Tafeln als die bisher in Menge vorhandenen schlechten Tafeln zu versehen. Dieses Werk würde bereits in der Leipziger Michaelismesse 1776 herausgekommern seyn, wenn sich nicht eine gegründete Hoffnung gezeigt hätte, in dieser Sache ein mehreres zu thun. Hierdurch verzögerte sich aber die Ausgabe, und es blieb mir nichts*

*übrig, als dieselbe in dem Messcatalogo der Leipziger Ostermesse 1777 als ein zu erwartendes Werk dem Publico anzukündigen, um wenigstens neue kleine und schlechte Ausgaben solcher Tafeln zu verhindern; ich erfuhr aber zu meiner höchsten Verwunderung, daß demnungeachtet die in Frankreich bereits durch bessere Ausgaben verdrungene Rivard'sche [Henderson # 73] kleine Tafel in Wien von neuem zur Leipziger Michaelismesse herausgekommen wäre, und weiter keine Verdienste hätte, als dass sie das auf vielen Bogen enthielte, was Rivard in seiner Tafel in viel weniger Raum gefasset hatte.*

*Man wird vielleicht hier eine weitläufige Erklärung und Gebrauch dieser Tafeln erwarten, ich werde aber alles, was ich noch darüber zu sagen habe, in eine kurze Einleitung fassen, weil ich voraussetze, dass derjenige, welcher dergleichen Tafeln gebraucht, entweder ihren Gebrauch bereits verstehe, oder ihn doch aus den Anfangsgründen der Mathematik zu erlernen sich vorsetze. Denn dergleichen Erklärungen zum Gebrauch halte ich für wenig geschickt, ihren Zweck zu erreichen, weil unmöglich, ohne zu weitläufig zu werden, alles Nöthige sich sagen lässt, was man sagen müsste, um deren Gebrauch unmittelbar zu erläutern.*

*Ich finde auch nöthig, anzuzeigen, dass dieses Werk seit meiner letzten Anzeige eine merkliche Veränderung erlitten hat; erstlich ist dasselbe statt aus sechs und dreyssig Bogen zu bestehen, auf einige vierzig Bogen angewachsen; zweytens sind verschiedene Tafeln, so zum zweyten Bande bestimmt waren, in den ersten gekommen, weil sie mir nicht allein dorthin schicklicher zu seyn schienen, sondern dadurch auch beyde Bände gleicher abgetheilt wurden, und drittens habe ich die Tafel, welche alle Brüche, deren Nenner unter 100 in Decimaltheilen ausgedruckt, enthalten sollte, weil sie mir noch zur Zeit zu unreif schien, besonders da sich Herr Mag. Hindenburg zu Leipzig gütigst gegen mich erboten, beträchtliche Zusätze zu liefern, völlig weggelassen, und an deren Stelle andere nützliche Tafeln eingeschaltet. Denn da ich willens bin, wenn gegenwärtiges Werk gut aufgenommen wird, noch den dritten Band, der aus verschiedenen vermischten mathematischen Tafeln bestehen wird, herauszugeben, so habe ich diese Tafel bis dahin ersparen wollen. [Dazu ist es u.a. wegen seines Todes 1790 nicht mehr gekommen, kk]*

*Ob ich gleich keine Ausgabe gespart habe, alles fehlerrein zu erhalten, und selbst meines Theils alles gethan habe, was nur immer möglich war, so habe ich dennoch zu meinem Verdruss erfahren müssen, dass es beynahe unmöglich ist, bey einer solchen Menge Zahlen einige wenige Ziffern nicht zu verfehlen. Denn es haben sich aller angewandten Mühe ohnerachtet bey dem Abdruck dieses Werkes noch einige Fehler eingeschlichen; diese habe ich jeder Einleitung befonders angehangen. Es sind überhaupt wenige, welche der Leser gütigst verbessern wolle, und in der Absicht rathe ich, jedes Exemplar vorher durch den Buchbinder gut schlagen und planiren zu lassen, damit die wenigen fehlerhaften Stellen deutlich und gehörig geändert werden können. Ich hoffe, es wird dadurch gegenwärtiges Werk völlig correct werden, sollten sich aber dennoch wieder alle Vermuthung einige Stellen finden, wo dieses nicht wäre, so ersuche mir es anzuzeigen, weil ich jederzeit Gelegenheit finden werde, dieses dem Publico irgendwo bekannt zu machen. Hätte mein seeliger Freund, Herr Eisenhardt, sich ferner dieses Werkes annehmen können, so bin ich überzeugt, dass der Abdruck desselben durch seine Beyhülfe so correct geworden seyn würde, als die Handschrift der Tafel der Sinus &c. sich jetzt befindet.*

*Schlüsslich erinnere ich, dass ich bey Anfertigung dieses Werkes mehr auf einen allgemeinen als besondern Gebrauch gesehen habe; in der Absicht sind auch der Titel, die Vorrede und die Einleitungen französisch und deutsch ausgefertigt worden. Ich hoffe daher, es wird dasselbe den Messkünstlern, Astronomen, Mechanisten, Baumeistern, Ingenieurs, Artilleristen, Feldmessern und Künstlern gleich angenehm und nützlich seyn. Ich erwarte indessen gelassen das Urtheil, welches Kenner darüber zu fällen belieben werden, und bin zufrieden, wenn meine gehabte Mühe und Arbeit nicht ohne Nutzen gewesen ist.*

In dieser Einleitung steckt eigentlich alles, was einen Tafelmacher bewegt, seine eigene Tafel herauszugeben - die Unzufriedenheit mit dem Bestehenden !

Und wie in vielen Fällen ist der Autor (in diesem Falle J.C. Schulze) wegen seines frühen Todes nicht zu weiteren Ausgaben gekommen.

Schulze hat als einer der wenigen Autoren seiner Zeit die 48stelligen von Wolfram berechneten Napierschen Logarithmen sowie die trigonometrischen Logarithmen von Kepler ( $\text{Log.hyp.Sin. } 30^\circ = 0.69314718$ ; Seite 202) veröffentlicht. Ansonsten besteht das Hauptwerk aus 7stelligen Logarithmen. Die trigonometrischen Werte hat Schulze von Ursinus übernommen [Henderson # 8].

Der mir vorliegende Band ist mit großer Wahrscheinlichkeit von einem Astronomen genutzt worden. Darauf weisen zahlreiche Annotationen und handschriftlich ergänzte Formeln hin.

An dieser Stelle sei der Hinweis erlaubt, dass C. F. Gauss als 14jähriger von seinem Herzog Carl Wilhelm Ferdinand die Tafeln von Schulze geschenkt bekam. Weitere Tafeln der Gauss-Bibliothek sind in einer Arbeit von Karin Reich aufgeführt <sup>29</sup>.

<sup>29</sup> Reich, Karin; Logarithmentafeln, die wichtigsten Rechenhilfsmittel für mehr als 350 Jahre; In: Neue Welten - Braunschweiger Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte, Band 1 Seite 162 - 175; 2001

1780 hat Michael Taylor (1756 - 1789; Berechner des Nautical Almanach beim Commissioneer of Longitude) seine "Sexagesimal Table.." für Astronomen, Mathematiker, Navigatoren und Kaufleute im Namen des "Commissioneers of Longitude bei William Richardson (Drucker) und C. Nourse (Buchhändler) in London ohne logarithmische Anteile herausgegeben.

12 Jahre später, 1792, erschienen seine "*Tables of Logarithms of all Numbers, from 1 to 101.000; and of the Sines and Tangents to every Second of the Quadrant*" in London im Folioformat. Leider erlebte er die Herausgabe nicht mehr. Dies übernahm Nevil Maskelyne (1732 - 1811; Astronomer Royal) und fügte eine ausführliche Einleitung über den Umgang mit den Logarithmen sowie Anleitungen zu Rechenbeispielen aus Handel, Trigonometrie und Astronomie (insgesamt 63 Folioseiten) hinzu [Henderson # 92].

1785 gab Charles Hutton (1737-1823, Mathematiker) seine Erstauflage der "Mathematical Tables.." heraus. Henderson schreibt dazu:

" 88.0. Hutton, Charles. *Mathematical Tables: containing Common, Hyperbolic and Logistic Logarithms. Also Sines, Tangents, Secants and Versed Sines, Both Natural and Logarithmic. Together with Several Other Tables Useful in Mathematical Calculations...* London. 1785. (8<sup>o</sup>.) Prefixed to this edition and to all the editions up to the sixth is Hutton's Introduction, including a history of Trigonometrical Tables and of Logarithms, an essay on the Construction of Logarithms and finally the "Description and Use of Logarithmic Tables." This introduction extends to 180 pages. The history is very faithful and on the whole unbiassed; it is especially interesting for the information given with regard to the early trigonometrical tables.

Table 1, pp. (2)-(185). "*Containing the Logarithms of All Numbers, from 1 to 100,000.*" Seven-decimal logarithms of 1 (1) 1000 direct and to 100,000 by modern arrangement with 1000 to 9999 down left marginal column. The figures are grouped 3, 4, but no sign indicates where the final leading figure has to be increased. At the top and foot of the columns the numbers 0, 1, 2, ... 9 appear. In the right margin proportional parts of the differences are exhibited. At the beginning of the table, where the differences change quickly, the differences are not shown in a separate column ; the difference has to be taken out at sight and then the computer fixes on the appropriate table of proportional parts. Up to 31,000 (p. 47) the first number on the page and the first three figures of its logarithm, and from 31,000 onwards the three leading figures of the first number and of its logarithm, are shown at the top of each page. Lines are ruled after fifth rows and between columns, double lines between columns 4 and 5.

Table 2, pp. (186)-(190). "*For finding Logarithms and Numbers to 20 Places of Figures.*" Twenty-decimal logarithms of 1 (1) 1001 (2) 1161 direct in two sets of columns of 50 numbers in each per page.

Table 3, pp. (197)-(199). Twenty-decimal logarithms of 101,000 (1) 101,139 with first, second and third differences in adjacent columns. The fourth differentes are negligible.

Table 5, pp. (203)-(206). *Sharp's Logarithms: 61-place logarithms with characteristics of all numbers to 100 and of primes from 100 to 1100. Figures are grouped in fixes separated by commas (last group has 6 figures). The old numerals are here used, that is, the "head and tail" type.*

Table 6, p. (207). Sixty-one-decimal logarithms of numbers 999980 (1) 1000020 with four orders of differences to 30 places.

*The work was dedicated to Nevil Maskelyne the Astronomer Royal; in the preface Hutton says the undertaking of preparing a correct edition of mathematical tables was occasioned by the extreme inaccuracy [auf Grund von Druckfehlern, kk] of the fifth, and last, edition of Sherwin's Tables [ca. 1772, kk]."*

Auf Grund der Bedeutung dieser Tafeln von Hutton im englischsprachigen Raum - sie erschienen in mehreren Auflagen bis 1860 - ist auf der folgenden Abbildung das Inhaltsverzeichnis der 6. Auflage (hierbei handelt es sich um die letzte Auflage mit der ausführlichen Einleitung und ab Seite 156 mit Anleitungen zu Berechnungen in der Trigonometrie) dargestellt.

viii			
<i>A short Abstract of the principal Contents, may be as follows:</i>			
1. <i>In the Introduction.</i>			
	Page		Page
History of trigonometrical tables	- 1	Dodson's Anti-log. canon	- 122
before the invention of logarithms, with the various methods of construction	- 1	Description and use of logarithmic tables	- 125
On the word <i>sinus</i>	- 17	Definition and notation	- 125
History of logarithms	- 20	Properties of logarithms	- 127
Nature of logarithms	- 22	Construction of logarithms	- 127
Invention of logarithms	- 24	Description and use of our tables	- 129
Different sorts of logarithms	- 25	Of our large table	- 129
Construction of logarithms	- 42	Logarithmical arithmetic	- 134
By Napier	- 42	Of the table to 20 places	- 137
Kepler	- 49	Of the table to 61 places	- 142
Briggs	- 61	Of the hyperbolic logarithms	- 146
Briggs's Trigonometria Britan.	75	Of the logistic logarithms	- 147
Relation between logarithms and certain curves	- 84	Of the log. sines and tangents to every second	- 148
Gregory's construction	- 87	Of the general table of log. sines, tangents, &c.	- 150
Mercator's Logarithmo-technia	87	Trigonometrical rules	- 156
Gregory's Exercit. Geometricæ	97	The cases of plane triangles resolved by logarithms	- 160
Sir I. Newton's methods	- 102	The cases of spherical triangles resolved by logarithms	- 162
Halley's	- 107	Use of the versed sines	- 170
Sharp's	- 110	Of the traverse table	- 172
By Fluxions	- 111	Of Mercator's sailing	- 175
Cotes's Logometria	- 112	Of the length of circular arcs	- 178
Taylor's construction	- 116	Of comparing the common and hyp. logs.	- 179
Long's method	- 118		
Jones's	- 119		
Reid, &c.	- 122		
2. <i>In the Tables themselves.</i>			
Tab.	Page	Tab.	Page
1. Logarithms from 1 to 108000	181	10. Natural and logarithmic sines, tangents, secants, and versed sines	- 452
2. Logarithms, &c, to 20 places	382	11. Traverse table	- 542
3. Id. with differences	- 393	12. Length of arcs	- 544
4. Numbers to logarithms to 20 places	- 396	13. Table to change common and hyperbolic logarithms from one to the other	- 545
5. Logarithms to 61 places	- 399	14. Points of the compass	- ib.
6. Id. with differences	- 403	15. Errata in Gardiner's and other logarithms	- 546
7. Hyperbolic logarithms	- 404		
8. Logistic logarithms	- 415		
9. Sines and tangents to seconds	- 421		

Es war 1794 als in der Weidmannischen Buchhandlung Leipzig die

**"Vollständige Sammlung größerer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln nach Adrian Vlack's 'Arithmetica Logarithmica' und 'Trigonometria Artificialis' verbessert, neu geordnet und vermehrt von Georg Vega, Major und Professor der Mathematik beym kaysrl. Königl. Bombardierkorps, und Correspondenten der königl. großbr. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen"**

im Folioformat - auch Thesaurus Completus genannt - erschien. Die Sammlung hat eine lateinisch-deutsche Einführung mitsamtem Hinweis auf die Rechenmethode zur Bestimmung der Logarithmen. Die Anleitungen zum Rechnen sind recht knapp gehalten. Die Logarithmen haben 10 Stellen. Außerdem hat Vega die 48stelligen natürlichen Logarithmen des Herrn Wolfram (einem holländischen Artillerioffizier) aus den Tafeln von Johann Carl Schulze von 1778 korrigiert und hinzugefügt.

Dazu macht er folgende Anmerkung, (die an die Vorrede von J.C. Schulze erinnern): "...Zum Gebrauche dieser 48stelligen Tafeln will ich keine Anweisung geben. Für diejenigen, die in der feinern Analysis und Mechanik nicht bewandert sind, wäre eine solche Anweisung unnützig; für diejenigen aber, die in diese erhabene Lehre eingeweiht sind, überflüssig."

1797 erschienen im gleichen Verlag im Format 8° "Georg Vega's logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebs andern zum Gebrauch der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln" in 2 Bänden. Bei diesen Tafeln handelt es sich um die 2. Auflage der erstmals 1783 erschienenen Tafeln.

Hierin werden in Latein und Deutsch im Band I auf 84 Seiten ausführliche Hinweise zum Gebrauch der 7stelligen Tafeln gegeben. Eine Formelsammlung im Appendix widmet sich hauptsächlich der Trigonometrie. Deren Aufbau erinnert an die Darstellung von J. Werner im Addendum 2 dieser Arbeit. Im zweiten Band findet sich auf einer 80seitigen Einleitung eine Sammlung von Rechenbeispielen, die aus Trigonometrie und Astronomie stammen sowie zahlreiche astronomische Tabellen und im Anhang "einige merkwürdige Formeln aus der mathematischen Analysis".

Unter Mitwirkung verschiedener Herausgeber (Julius Ambrosius Hülsse, 1812-1876, Technologie; Karl Bremiker, 1804-1877, astronomischer Rechner) kamen die Tafeln von Georg Freiherr von Vega (1756 - 1802) nach seinem Tod mit unterschiedlichen Titeln heraus. Aber letztendlich setzten sich im deutschsprachigen Raum im wissenschaftlichen Bereich die 7stelligen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln des Herausgebers Karl Bremiker durch, die bis 1964 ! über 100 Auflagen erlebten. In dieser Zeitspanne von über 150 Jahren wurde der Umfang der Erklärungen und Rechenbeispiele wie auch die Zahl der Sondertabellen und Formeln auf ein Minimum zurückgefahren, weil man davon ausgehen konnte, dass die obige Anmerkung von Vega inzwischen auf alle logarithmischen Werte/Tafeln zutrif.

Das gilt nicht nur für die Tafeln des Georg Vega, sondern war auch bei anderen Tafelmachern/Autoren der Fall.

Für den Einsatz in der Astronomie hat die Genauigkeit der 7 Stellen nicht immer ausgereicht. Diesem Mangel trugen manche Tafelmacher/Herausgeber dadurch Rechnung, dass sie die "Radix-Tabelle", die schon bei John Napier 1618 auftaucht und von William Oughtred erstellt wurde<sup>30</sup>, aufgenommen haben, mit der höherstellige Logarithmen berechnet werden können (z.B. Ludwig Schrön, 1799 - 1875, Leiter der Sternwarte Jena; Siebenstellige gemeine Logarithmen., Vieweg, Braunschweig 1910) - siehe rechte Abbildung.

Diese Tafel von Schrön wurde erstmals 1860 herausgegeben und deren Texte ins Ungarische, Dänische, Englische, Französische, Italienische, Holländische und Schwedische übersetzt.

The image shows two historical logarithm tables. The left table, titled "(12)", is a supplement to Vega's logarithmic tables, providing sine and logarithmic values for angles from 1 to 90 degrees. It includes columns for sine, logarithm, and logarithmic sine. Below the table is the caption: "The supplement of the Table for sents and hundredth parts." The right table is titled "Tafel zur Berechnung der Logarithmen der Zahlen." and is a multi-column table for calculating logarithms of numbers. It includes columns for the number, common logarithm, and natural logarithm, with various sub-tables for different ranges of numbers (e.g., 10000, 100000, 1000000).

Die Tafeln für Astronomen wurden kontinuierlich weiter verbessert und korrigiert und es wurden Hilfstafeln zur Erhöhung der Genauigkeit herausgegeben.

<sup>30</sup> Kühn, Klaus; William Oughtred und die Logarithmen; Seite 1-12 im Tagungsband I des IM 2006 Greifswald

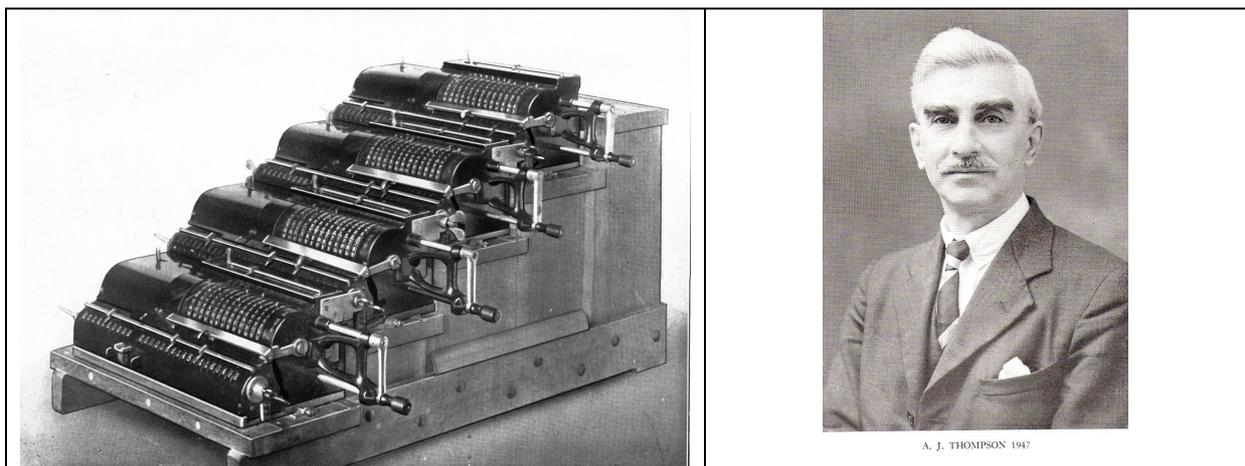


1922 gab das Reichsamt für Landesaufnahme in Berlin unter wissenschaftlicher Leitung von Jean Peters eine "Zehnstellige Logarithmentafel" heraus [Henderson # 199.3]. Es wurden dazu die maschinell berechneten Werte der Tafeln von 1910 herangezogen, lediglich bei Grenzwerten kamen weitere Berechnungsmethoden von Anton Steinhauser [Henderson # 167] zum Einsatz. Insgesamt handelt es sich hier um ein dreibändiges Werk, da auch die trigonometrischen Funktionen (auf tausendstel) wie auch eine Formelsammlung Bestandteil dieses einzigartigen Werkes waren, das von Peters als Nachfolge des Vega'schen "Thesaurus" gesehen wurde. Allein im ersten Band sind zusätzlich zu den Logarithmentafeln (607 Seiten) in einem Anhang weitere 14 Tafeln auf 195 Seiten enthalten, die den Ansprüchen der Astronomen in vollem Umfang gerecht werden mussten.

Aus dieser zehnstelligen Tafel ging eine siebenstellige hervor, die Peters durch das Reichsamt für Luftaufnahme 1940 in Berlin herausgab. Diese Tafeln enthalten eine Formelsammlung, auch für Ausgleichsrechnungen von Beobachtungen.

Der Einsatz von Rechenmaschinen führte zu weiteren Tafeln mit 20stelligen Logarithmen, die ab 1924 von Alexander John Thompson in der "Logarithmetica Britannica" [Henderson # 199.4] in mehreren Schritten/Bänden veröffentlicht wurden.

Mit der unten abgebildeten Rechenmaschinenkombination aus 4 Triumphatoren hat A.J. Thompson die 20stelligen Logarithmen berechnet.<sup>34</sup>



Zur Bedeutung der viel-/hochstelligen Logarithmen in der Astronomie hat mir Peter Holland 2008 folgende Mitteilung geschrieben:

*" In Kassel kam man zu Zeiten von Bürgi und Kepler (also einige Jahre vor Napier, [in denen noch mit der Prosthaphärese gerechnet wurde, kk]) auf eine Messgenauigkeit von 0,2 bis 0,8 Bogensekunden. Ich vermute, Rothmann (der Astronom in Kassel) hat diese Genauigkeit beim Messen des Meridiandurchgangs eines Sterns erzielt.*

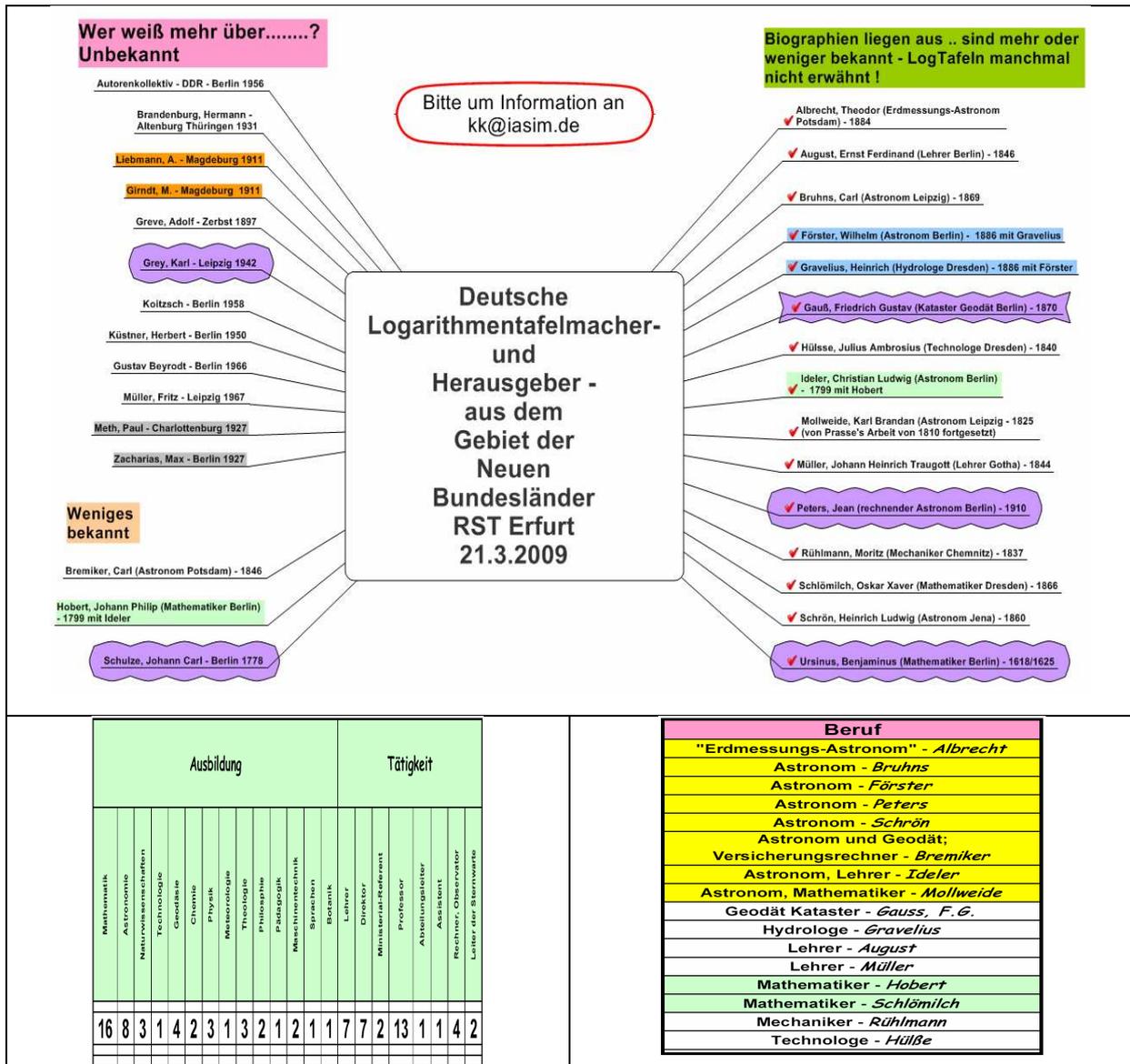
*Zum Vergleich: Eine halbe Bogensekunde ist eine Euro-Münze in 1500 Metern Entfernung. Ein ganz schön kleiner Winkel. Nicht schlecht, das Team in Kassel, oder?*

*Wenn man z.B. eine Planetenbahn oder eine Kometenbahn berechnen will, dann braucht man Entfernungen, und schon kommt der Sinus ins Spiel. Je genauer der Sinus-Wert, umso besser das Ergebnis. Nun macht es wenig Sinn, sich einen genauen Sinus durch eine nur siebenstellige Logarithmus-Funktion zu verderben. Also braucht man vielstellige Logarithmen. Je besser der Sinus, desto vielstelliger der Logarithmus. Dann kann man die Messgenauigkeit in Ergebnisgenauigkeit umwandeln.*

*Und jetzt stelle Dir vor, es geht nicht um solch nahe Objekte wie Kometen und Planeten. Es geht z.B. um Sterne und deren Parallaxe. Hier ist Rechengenauigkeit gefragt. Also gute Sinus-Werte und laaaange Logarithmen."*

<sup>34</sup> Weiss, Stephan; <http://www.mechrech.info/publikat/publikat.html#pub17>, 2007

Dass die Astronomen zur Erleichterung ihrer Arbeit sehr eifrig als Herausgeber von Logarithmentafeln agierten, zeigt eine Übersicht der Berufe der Tafelmacher auf<sup>35</sup>:



In diesem Zusammenhang sollen auch die Gaussischen Logarithmen angesprochen werden, bei denen es sich **nicht** um die sehr verbreiteten - meist im Schulunterricht eingesetzten und beliebten - Tafeln von Friedrich Gustav Gauss ("Kataster-Gauss") handelt, sondern um die Additions- und Subtraktionslogarithmen, die Carl Friedrich Gauss als Astronom sehr schätzte und deren Anwendung propagierte. Diese Logarithmen führten zu einer weiteren Rechenvereinfachung, wenn es darum ging, zwei Werte, deren Logarithmen bekannt sind, zu addieren bzw. zu subtrahieren<sup>36</sup>. Für Gauss waren Logarithmen "tägliches Arbeitsgeräth".

Die Additions- und Subtraktionslogarithmen sind meist in solchen Tafelwerken eingefügt, die für die Astronomen bestimmt waren (Schrön) oder wurden als eigenständige Tafeln herausgegeben. Stellvertretend sei die von Erhard Adolph Matthiessen "Tafel zur bequemeren Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweyer Größen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind; Altona 1817" mit einer 53seitigen Anleitung und 211 Seiten 5stelliger Werte angeführt.

<sup>35</sup> Kühn, Klaus; Deutsche Logarithmentafelmacher und Herausgeber aus dem Gebiet der Neuen Bundesländer; RST Erfurt 21.3.2009

<sup>36</sup> Kühn, Klaus; C.F. Gauss und die Logarithmen; Seite 75 - 83 Mitteilungen der Gauss-Gesellschaft Nr. 40, Göttingen 2003

Im folgenden Aufgabenbeispiel von Carl (Karl) F. Gauss aus "Theoria Motus" wird deutlich, wie intensiv er den Logarithmus einsetzte und wie wichtig die Additions- und Subtraktionslogarithmen (siehe Hinweis auf die Tafeln von Julius Zech; Tafeln der Additions- und Subtraktionslogarithmen für sieben Stellen; Weidmannsche Buchhandlung Berlin, 1863) dabei waren.

<p style="text-align: center;"><b>Karl Friedrich Gauss</b></p> <p style="text-align: center;">Theory of the Motion of the Heavenly Bodies Moving about the Sun in Conic Sections</p> <p style="text-align: center;">A Translation of <i>Theoria Motus</i></p> <p style="text-align: center;">Translated and with an Appendix by Charles Henry Davis</p> <p style="text-align: center;">Dover Publications, Inc., New York</p>	<p style="text-align: center;">292 APPENDIX.</p> <p>If these values are substituted in the general expression for coördinates, and if we put</p> $a \cos y \cos K \sin E + a \sin K (\cos E - e)$ $a \cos y = b$ $a \cos^2 i \cos \pi \left[ 1 + \tan^2 i \frac{\cos(\pi - 2\Omega)}{\cos \pi} \right] = A$ $-b \cos^2 i \sin \pi \left[ 1 + \tan^2 i \frac{\sin(\pi - 2\Omega)}{\sin \pi} \right] = B$ $a \cos^2 i \sin \pi \left[ 1 - \tan^2 i \frac{\sin(\pi - 2\Omega)}{\sin \pi} \right] = A'$ $b \cos^2 i \cos \pi \left[ 1 - \tan^2 i \frac{\cos(\pi - 2\Omega)}{\cos \pi} \right] = B'$ $a \sin i \sin(\pi - \Omega) = A''$ $b \sin i \cos(\pi - \Omega) = B''$ <p>the coördinates will be</p> $x = A (\cos E - e) + B \sin E = A (1 - e \sec E) + B \sin E$ $y = A' (\cos E - e) + B' \sin E = A' (1 - e \sec E) + B' \sin E$ $z = A'' (\cos E - e) + B'' \sin E = A'' (1 - e \sec E) + B'' \sin E$ <p>If the equator is adopted as the fundamental plane instead of the ecliptic, the same formulas may be used, if <math>\Omega</math>, <math>\pi</math>, and <math>i</math> are referred to the equator by the method of article 55. Thus, if <math>\Omega</math> denotes the right ascension of the node on the equator, for <math>\Omega</math>, <math>\pi</math>, and <math>i</math>, we must use <math>\Omega</math>, <math>\Omega + (\pi - \Omega) - \delta</math>, and <math>i</math> respectively.</p> <p>This form has been given to the computation of coördinates by Prof. Peirce, and is designed to be used with Zech's <i>Tables of Addition and Subtraction Logarithms</i>.</p> <p><i>Example.</i>—The data of the example of articles 56 and 58, furnish <math>\Omega = 158^\circ 30' 50''.43</math>, <math>\pi = 122^\circ 12' 23''.55</math>, <math>i = 11^\circ 43' 52''.89</math> when the equator is adopted as the fundamental plane; and also <math>\log b = 0.4288533</math>.</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td>When we find</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>\log \cos(\pi - 2\Omega)</math></td> <td>9.9853941 n</td> <td><math>\log \sin(\pi - 2\Omega)</math></td> <td>9.4679143</td> </tr> <tr> <td><math>\log \sec \pi</math></td> <td>0.2732948 n</td> <td><math>\log \csc \pi</math></td> <td>0.0725618</td> </tr> <tr> <td><math>\log \tan^2 i</math></td> <td>8.0234332</td> <td><math>\log \tan^2 i</math></td> <td>8.0234332</td> </tr> <tr> <td><math>\log e</math></td> <td>8.2826221</td> <td><math>\log e'</math></td> <td>7.5039093</td> </tr> </table>	When we find				$\log \cos(\pi - 2\Omega)$	9.9853941 n	$\log \sin(\pi - 2\Omega)$	9.4679143	$\log \sec \pi$	0.2732948 n	$\log \csc \pi$	0.0725618	$\log \tan^2 i$	8.0234332	$\log \tan^2 i$	8.0234332	$\log e$	8.2826221	$\log e'$	7.5039093	<p style="text-align: center;">APPENDIX.</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td><math>\text{add. } \log \frac{1}{2}</math></td> <td>0.0082354</td> <td><math>C. \text{ sub. } \log \frac{1}{2}</math></td> <td>9.99169</td> </tr> <tr> <td><math>\log \cos \pi</math></td> <td>9.7267022 n</td> <td><math>\log \cos \pi</math></td> <td>9.72670</td> </tr> <tr> <td><math>\log \cos^2 i</math></td> <td>9.9954404</td> <td><math>\log \cos^2 i</math></td> <td>9.99544</td> </tr> <tr> <td><math>\log a</math></td> <td>0.4423790</td> <td><math>\log b</math></td> <td>0.42885</td> </tr> <tr> <td><math>\log A</math></td> <td>0.1727609 n</td> <td><math>\log B'</math></td> <td>0.1426</td> </tr> </table> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td><math>\text{add. } \log \frac{1}{2}</math></td> <td>0.0013886</td> <td><math>C. \text{ sub. } \log \frac{1}{2}</math></td> <td>9.99861</td> </tr> <tr> <td><math>\log \sin \pi</math></td> <td>9.9274382</td> <td><math>\log \sin \pi</math></td> <td>9.92743</td> </tr> <tr> <td><math>\log \cos^2 i</math></td> <td>9.9954404</td> <td><math>\log \cos^2 i</math></td> <td>9.99544</td> </tr> <tr> <td><math>\log b</math></td> <td>0.4288533</td> <td><math>\log a</math></td> <td>0.4423790</td> </tr> <tr> <td><math>\log B</math></td> <td>0.3531155 n</td> <td><math>\log A'</math></td> <td>0.3638</td> </tr> </table> <p>This method may also be used to compute <math>b</math> and <math>A'</math> for the general of article 57. Thus:—</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td><math>\text{add. } \log \frac{1}{2}</math></td> <td>0.0082354</td> <td><math>C. \text{ sub. } \log \frac{1}{2}</math></td> <td>9.99169</td> </tr> <tr> <td><math>\log \cos \pi</math></td> <td>9.7267022 n</td> <td><math>\log \cos \pi</math></td> <td>9.72670</td> </tr> <tr> <td><math>\log \cos^2 i</math></td> <td>9.9954404</td> <td><math>\log \cos^2 i</math></td> <td>9.99544</td> </tr> <tr> <td><math>\log b, \sin K_0</math></td> <td>8.7506810 n</td> <td><math>\log b, \cos K_0</math></td> <td>9.7137</td> </tr> </table> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td><math>\text{add. } \log \frac{1}{2}</math></td> <td>0.0013886</td> <td><math>C. \text{ sub. } \log \frac{1}{2}</math></td> <td>9.99861</td> </tr> <tr> <td><math>\log \sin \pi</math></td> <td>9.9274382</td> <td><math>\log \sin \pi</math></td> <td>9.92743</td> </tr> <tr> <td><math>\log \cos^2 i</math></td> <td>9.9954404</td> <td><math>\log \cos^2 i</math></td> <td>9.99544</td> </tr> <tr> <td><math>\log b, \cos K_0</math></td> <td>9.9242622 n</td> <td><math>\log b, \sin K_0</math></td> <td>9.9214</td> </tr> <tr> <td><math>\log \tan K_0</math></td> <td>9.8001188</td> <td><math>\log \tan K_0</math></td> <td>0.20777</td> </tr> <tr> <td><math>\log \cos K_0</math></td> <td>9.9254698 n</td> <td><math>\log \sin K_0</math></td> <td>9.92094</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;"><math>\log b_0 = 9.9987924</math>      <math>\log b_0 = 9.9920</math> <math>K_0 = 212^\circ 36' 56''.1</math>      <math>K_0 = 121^\circ 47' 28''.1</math></p> <p>It will not be necessary to extend the example to the final expression, <math>y, z</math>, as illustrations of similar applications of the Addition and Subtraction Logarithms are given in the directions accompanying Zech's Tables.</p>	$\text{add. } \log \frac{1}{2}$	0.0082354	$C. \text{ sub. } \log \frac{1}{2}$	9.99169	$\log \cos \pi$	9.7267022 n	$\log \cos \pi$	9.72670	$\log \cos^2 i$	9.9954404	$\log \cos^2 i$	9.99544	$\log a$	0.4423790	$\log b$	0.42885	$\log A$	0.1727609 n	$\log B'$	0.1426	$\text{add. } \log \frac{1}{2}$	0.0013886	$C. \text{ sub. } \log \frac{1}{2}$	9.99861	$\log \sin \pi$	9.9274382	$\log \sin \pi$	9.92743	$\log \cos^2 i$	9.9954404	$\log \cos^2 i$	9.99544	$\log b$	0.4288533	$\log a$	0.4423790	$\log B$	0.3531155 n	$\log A'$	0.3638	$\text{add. } \log \frac{1}{2}$	0.0082354	$C. \text{ sub. } \log \frac{1}{2}$	9.99169	$\log \cos \pi$	9.7267022 n	$\log \cos \pi$	9.72670	$\log \cos^2 i$	9.9954404	$\log \cos^2 i$	9.99544	$\log b, \sin K_0$	8.7506810 n	$\log b, \cos K_0$	9.7137	$\text{add. } \log \frac{1}{2}$	0.0013886	$C. \text{ sub. } \log \frac{1}{2}$	9.99861	$\log \sin \pi$	9.9274382	$\log \sin \pi$	9.92743	$\log \cos^2 i$	9.9954404	$\log \cos^2 i$	9.99544	$\log b, \cos K_0$	9.9242622 n	$\log b, \sin K_0$	9.9214	$\log \tan K_0$	9.8001188	$\log \tan K_0$	0.20777	$\log \cos K_0$	9.9254698 n	$\log \sin K_0$	9.92094
When we find																																																																																																						
$\log \cos(\pi - 2\Omega)$	9.9853941 n	$\log \sin(\pi - 2\Omega)$	9.4679143																																																																																																			
$\log \sec \pi$	0.2732948 n	$\log \csc \pi$	0.0725618																																																																																																			
$\log \tan^2 i$	8.0234332	$\log \tan^2 i$	8.0234332																																																																																																			
$\log e$	8.2826221	$\log e'$	7.5039093																																																																																																			
$\text{add. } \log \frac{1}{2}$	0.0082354	$C. \text{ sub. } \log \frac{1}{2}$	9.99169																																																																																																			
$\log \cos \pi$	9.7267022 n	$\log \cos \pi$	9.72670																																																																																																			
$\log \cos^2 i$	9.9954404	$\log \cos^2 i$	9.99544																																																																																																			
$\log a$	0.4423790	$\log b$	0.42885																																																																																																			
$\log A$	0.1727609 n	$\log B'$	0.1426																																																																																																			
$\text{add. } \log \frac{1}{2}$	0.0013886	$C. \text{ sub. } \log \frac{1}{2}$	9.99861																																																																																																			
$\log \sin \pi$	9.9274382	$\log \sin \pi$	9.92743																																																																																																			
$\log \cos^2 i$	9.9954404	$\log \cos^2 i$	9.99544																																																																																																			
$\log b$	0.4288533	$\log a$	0.4423790																																																																																																			
$\log B$	0.3531155 n	$\log A'$	0.3638																																																																																																			
$\text{add. } \log \frac{1}{2}$	0.0082354	$C. \text{ sub. } \log \frac{1}{2}$	9.99169																																																																																																			
$\log \cos \pi$	9.7267022 n	$\log \cos \pi$	9.72670																																																																																																			
$\log \cos^2 i$	9.9954404	$\log \cos^2 i$	9.99544																																																																																																			
$\log b, \sin K_0$	8.7506810 n	$\log b, \cos K_0$	9.7137																																																																																																			
$\text{add. } \log \frac{1}{2}$	0.0013886	$C. \text{ sub. } \log \frac{1}{2}$	9.99861																																																																																																			
$\log \sin \pi$	9.9274382	$\log \sin \pi$	9.92743																																																																																																			
$\log \cos^2 i$	9.9954404	$\log \cos^2 i$	9.99544																																																																																																			
$\log b, \cos K_0$	9.9242622 n	$\log b, \sin K_0$	9.9214																																																																																																			
$\log \tan K_0$	9.8001188	$\log \tan K_0$	0.20777																																																																																																			
$\log \cos K_0$	9.9254698 n	$\log \sin K_0$	9.92094																																																																																																			

Original von 1847; Dover Publications 1963; Appendix von Prof. Encke und Prof. Peirce

Entwicklungsgeschichtlich lassen sich für die Tafelwerke der Logarithmen - für den Einsatz in der Astronomie - grob folgende Reihen bilden:

1. Napier -> Filipowski
2. Briggs -> Vlacq -> Sherwin -> Gardiner -> Callet (Frankreich) -> de Prony (1891)
3. Briggs -> Vlacq -> Sherwin -> Hutton (England) -> Thompson (1924)
4. Briggs -> Vlacq -> Vega (Deutschland) -> Peters (1922)
5. Bürgi -> (Börgen 1908 [Henderson # 195])
6. Kepler -> Schulze
7. Leonelli [Henderson # 107] -> C.F. Gauss

Im Schulbetrieb hielten die Logarithmen über den gesamten Zeitraum ihrer Existenz weiterhin Einzug. Allerdings war auch hier zu vermerken, dass die Tafeln immer einfacher gehalten wurden. Sowohl verschwanden im Laufe der Jahre die Einleitungen mit geschichtlichen Hintergründen und ausführlichen Rechenbeispielen als auch wurde die Stellenzahl meist auf 4 reduziert, damit die Schüler mit "tragbaren" Tafeln in die Schule gehen konnten.

Nicht verzichtet wurde allerdings auf Formelsammlungen wie auch auf astronomische Angaben, die den Tafeln beigelegt oder in sie integriert waren.

In der DDR war Astronomie ein Schulfach und dementsprechend waren die dort erschienenen Tafeln von z.B. Küstner oder Müller oder Autorenkollektiv<sup>37</sup> den astronomischen Berechnungsbedürfnissen angepasst.

Unter dem Titel "Mathematisches Hilfsbuch für Studierende und Freunde der Astronomie" hat Wolfgang Wepner ca. 1980 eine Sammlung von Basisinformationen und zahlreichen Anwendungen von astronomischen Berechnungen herausgebracht<sup>38</sup>. Dieses Hilfsbuch entstand in der Übergangszeit zwischen dem Einsatz von Logarithmentafeln und Taschenrechnern und kann als Anleitung zum Programmieren astronomischer Berechnungen genutzt werden, wie sie z.B. mit dem Taschenrechner HP 41C möglich waren.

Heutzutage werden astronomische Berechnungen, z.B. in der Astronavigation, mit entsprechenden Computerprogrammen (z.B. [www.NauticTools.de](http://www.NauticTools.de)) durchgeführt.

<sup>37</sup> [www.rechnerlexikon.de](http://www.rechnerlexikon.de) - Aufstellung bekannter Logarithmentafeln

<sup>38</sup> Wepner, Wolfgang; Mathematisches Hilfsbuch für Studierende und Freunde der Astronomie; Treugesell-Verlag Düsseldorf

## 7 Die Wiederentdeckung der Trigonometrischen Tafeln und der höherstelligen Logarithmen

Die Renaissance der Rechenmaschinen mit ausgereifter Technik zu Beginn des 20. Jahrhunderts verlief parallel zur Wiederbelebung der Herausgabe der natürlichen trigonometrischen Tafeln. Denn nun war es möglich geworden, die aufwändigen Berechnungen direkt mit den trigonometrischen Werten durchzuführen, ohne auf Logarithmen zurückgreifen zu müssen. D.h. man konnte sich die Rückkonvertierung ersparen.

Wilhelm Jordan hat 1897 das "Opus Palatinum - Sinus- und Cosinus-Tafeln von 10" zu 10" in der Hahn'schen Buchhandlung Hannover" in einer Neuauflage "für Landmesser wieder ans Licht gezogen".

Jean Peters schreibt in seiner 1918 im Verlag der Optischen Anstalt Berlin erschienenen Tafel "Siebenstellige Werte der Trigonometrischen Funktionen von Tausendstel zu Tausendstel des Grades": *"Immer weiter dehnt sich der Benutzerkreis für Rechenmaschinen aus. Wenn bisher die Rechenmaschine zur Bewältigung von umfangreichen astronomischen, geodätischen und optischen Rechnungen weniger verwendet wurde, so liegt dies wohl hauptsächlich an dem Mangel an hochstelligen Tafeln für die numerischen Werte der trigonometrischen Funktionen. Diese Lücke in der Tafelliteratur zu schliessen, dient die vorliegende Tafel...."*. Peters gab mehrere Werke mit unterschiedlichen Stellenzahlen und sexagesimal bzw. dezimal geteilten Graden der natürlichen trigonometrischen Funktionen heraus.

Von Hermann Brandenburg erschien 1931 im Verlag Von Alfred Lorenz, Leipzig eine "Siebenstellige trigonometrische Tafel" in 2. Auflage (1. Auflage ca. 1922), in der sich Brandenburg auf die Werke von Regiomontanus, Rheticus und die des Pitiscus bezieht. Bemerkenswert ist sein Vorwort in deutscher, englischer, französischer, spanischer, japanischer und russischer Sprache. Nach der beiliegenden Werbung der Firma Grimme&Natalis für Rechenmaschinen zu urteilen, wurde die Herausgabe von dieser Firma unterstützt und international genutzt.

Der Rechenmaschinenhersteller Grimme&Natalis in Braunschweig, der die bekannten Brunsviga-Modelle herstellte, stellte in einer Schrift den Vorteil des Einsatzes seiner Rechenmaschine Trinks-Triplex gegenüber dem der Logarithmen durch weniger Rechenschritte und damit einer Zeitersparnis bei den Berechnungen dar<sup>39</sup>.

<p style="text-align: center;">D A S R E C H N E N</p> <p style="text-align: center;">mit der patentierten</p> <p style="text-align: center;"><i>Trinks-Brunsviga</i></p> <p style="text-align: center;">Rechenmaschine</p> <p style="text-align: center;"><small>Abteilung für empirische Hydrostatik und Chermodynamik.</small></p> <p style="text-align: center;">BAND II</p> <p style="text-align: center;">FACHWISSENSCHAFTLICHE BERECHNUNGEN</p> <p style="text-align: center;"><small>Druck und Verlag: Grimme, Natalis &amp; Co., A.-G., Braunschweig.</small></p>	<p style="text-align: center;">V O R W O R T</p> <p><b>D</b>ient der erste Band des vorliegenden Werkes der allgemeinen Einführung in das Maschinenrechnen, gibt er Beispiele vornehmlich für das kaufmännisch-werktätige Leben, so soll dieser zweite Band die Handhabung unserer Spezialmaschine Trinks-Triplex erläutern und vor allen Dingen den Beweis dafür erbringen, daß mit ihr nicht nur alle wissenschaftlichen und technischen Berechnungen durchgeführt werden können, sondern ihre Benutzung auch unschätzbare Vorteile bietet.</p> <p>Zu diesem Zwecke ist bei einer Reihe von Rechenbeispielen die bisher übliche logarithmische Lösung der mit der Trinks-Triplex-Rechenmaschine gegenübergestellt. Es kommt dabei wohl die Verminderung der reinen Schreibarbeit zur Geltung, auch die Anzahl der vorzunehmenden Rechenoperationen kann festgelegt werden, nicht jedoch läßt sich der riesige Zeitgewinn, die absolute Zuverlässigkeit und die Schonung der Nerven irgendwie darstellen, die das Arbeiten mit unserer Spezialmaschine bietet. Beim Maschinenrechnen bleibt das Gehirn vollkommen auf die Aufgabe selbst konzentriert, wird aber nicht mit der Durchführung an und für sich nebensächlicher Rechenoperationen belastet.</p> <p>Für die Lösung mit der Trinks-Triplex-Rechenmaschine ist die Zusammensetzung einer Formel im Gegensatz zu der logarithmischen Lösung vollkommen gleichgültig, mag die Formel aus noch so vielen Gliedern bestehen, die zu addieren, subtrahieren, multiplizieren oder dividieren sind, sie ist immer ohne Einstellung von besonderen Hilfwerten auf die denkbar einfachste Weise lösbar.</p>
<p>Die gewählten Beispiele können natürlich niemals ein erschöpfendes Bild aller vorkommenden Berechnungen geben, sie sollen vielmehr nur einen Anhalt dafür bieten, wie verschiedene Formeln anzufassen und mit der Trinks-Triplex durchzurechnen sind.</p> <p>Möge denn dieser zweite Band unseres Werkes hinausgehen, viele neue Freunde für „das Gehirn von Stahl“ gewinnen und so an dem Wiederaufbau unseres Vaterlandes mitarbeiten.</p> <p style="text-align: center;"><i>Braunschweig, Oktober 1921.</i></p> <p style="text-align: center;">Grimme, Natalis &amp; Co., A.-G.</p>	<p style="text-align: center;">1.</p> <p style="text-align: center;">A S T R O N O M I S C H E R E C H N U N G E N</p> <p style="text-align: center;">a) MIT HILFE EINER 5 STELLIGEN LOGARITHMENTAFEL</p> <p style="text-align: center;">b) MIT</p> <p style="text-align: center;">T R I N K S - T R I P L E X R E C H E N M A S C H I N E</p> <p style="text-align: center;">A) DURCHFÜHRUNG EINER EPHEMERIDEN-RECHNUNG</p> <p style="text-align: center;"><small>Nachdruck wird gerichtlich verfolgt.</small></p>

<sup>39</sup> Herrn Professor Erhard Anthes sei für die Überlassung einer Kopie der Anleitung gedankt.

TRINKS-BRUNSVIGA-RECHENMASCHINE

Durchführung einer

**Aufgabe.** Der Ort des Planeten 1920 HZ ist für den 16. November 1920 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 15 m. Gr. Zt. zu bestimmen.

Gegebene Elemente:  $M = 351^{\circ} 45' 27,7''$  12. Nov. 1920 12 m. Gr. Zt.  
 $\omega = 55^{\circ} 48' 40,6''$   
 $\Omega = 21^{\circ} 18' 16,3''$   
 $i = 43^{\circ} 26' 37,9''$   
 $\varphi = 40^{\circ} 46' 37,2''$   
 $\mu = 256,446$   
 $a = 5,76334$   
 $\epsilon = 23^{\circ} 26' 58,9''$   
 $e_0 = 37^{\circ} 42' 05,7''$

a) Lösung mit Logarithmentafel.

1. Verbesserung von  $M$  vom 12. November 1920 12 m. Gr. Zt. für 16. November 1920 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 15 m. Gr. Zt.

$$M' = 351^{\circ} 45' 27,7'' + 256,446 \cdot 3,8025$$

$$\begin{array}{r} 256,446 \cdot 3,8025 \\ \hline 1282230 \\ 512892 \\ 20515680 \\ \hline 769338 \end{array}$$

$$975,1359150 : 60 = 16^{\circ} 15,9''14$$

$$M = 351^{\circ} 45' 27,7''$$

$$M' = 325^{\circ} 1' 42,8''$$

2

Nachdruck wird gerichtlich verfolgt.

TRINKS-BRUNSVIGA-RECHENMASCHINE

Ephemeriden-Rechnung.

b) Lösung mit Trinks-Triplex Rechenmaschine.

$$M' = 351,7577 + \frac{256,446 \cdot 3,8025}{3600} = 352,02856$$

Anlage 1.

Anmerkung: Addition, Multiplikation und Division werden gleichzeitig ausgeführt, die Maschine zeigt sofort den Wert für  $M'$ .

Nachdruck wird gerichtlich verfolgt.

3

TRINKS-BRUNSVIGA-RECHENMASCHINE

2. Errechnung von  $E$  nach der Keplerschen Gleichung

$$M' = E - e_0 \cdot \sin E.$$

Die Lösung ist logarithmisch nicht möglich, sie läßt sich nur mit Hilfstafeln auf sehr umständliche und zeitraubende Weise durchführen. Es ergibt sich dann:

$$E = 338^{\circ} 1' 35,5''$$

3. Ermittlung der wahren Anomalie  $v$  und der Entfernung  $r$  von der Sonne.

$$r \cdot \cos v = a (\cos E - e)$$

$$r \cdot \sin v = a \cdot \cos \varphi \cdot \sin E.$$

$$E = 338^{\circ} 1' 35,5'' \quad \cos = 0,92736$$

$$e = \frac{0,65312}{\cos E - e} = 0,27424$$

$$a = 5,76334$$

$\log a = 0,76067$	$= 0,76067$
$\log \cos \varphi = 9,87924$	$\log (\cos E - e) = 9,43813$
$\log \sin E = 9,57308$	$\log r \cdot \cos v = 0,19880$
$\log r \cdot \sin v = 0,21299$	$\log \cos v = 9,84227$
$\log r \cdot \cos v = 0,19880$	$\log r = 0,35653$
$\log \tan v = 0,01419$	

$$v = 314^{\circ} 3' 50,4'' \quad r = 2,27263$$

Anmerkung: Es sind 7 Logarithmen und 1 Funktion aufzuschlagen, 2 Additionen und 3 Subtraktionen durchzuführen.

4

Nachdruck wird gerichtlich verfolgt.

TRINKS-BRUNSVIGA-RECHENMASCHINE

Die Gleichung wird umgestellt in  $E = M' + e_0 \cdot \sin E$  und die Summe  $M' + e_0 \cdot \sin E$  mit dem  $\sin E = \sin \varphi$  als Annäherungswert eingekurbelt. Der Wert für  $\sin E$  wird dann entsprechend der Summe  $E$  geändert, bis beide einander entsprechen.

Resultat:

$$E = 338^{\circ} 1' 35,5'' \quad \sin E = 0,37418$$

$$\tan v = \frac{\cos \varphi \cdot \sin E}{\cos E - e}$$

$$r = \frac{a (\cos E - e)}{\cos v}$$

$$E = 338^{\circ} 1' 35,5'' \quad \sin = 0,37418 \quad \cos = 0,92736$$

$$e = 0,65312$$

$$\cos E - e = 0,27424$$

$$\cos \varphi = 0,75726$$

$$v = 314^{\circ} 3' 50,4'' \quad \cos = 0,69545$$

$$r = 2,27268$$

Anmerkung: Es sind 5 Funktionen aufzuschlagen, 1 Subtraktion ist durchzuführen.

Nachdruck wird gerichtlich verfolgt.

5

In wieweit sich dieser Rechenmaschinen-Weg durchgesetzt hat, kann an dieser Stelle nicht beurteilt werden.

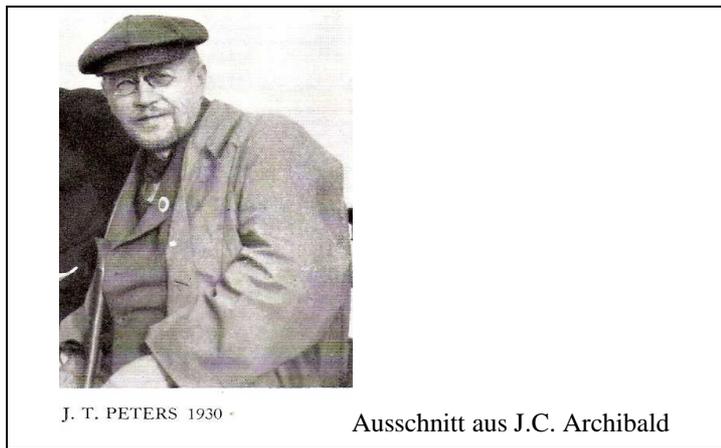
Bereits 1896 war es zu einer italienischen Neuauflage des Vega'schen Thesaurus mit seinen 10stelligen Logarithmen [Henderson # 192.1] angeblich mit einer Korrektur aller bekannten Fehler gekommen. Im Jahr 1923 [Henderson # 199.31] und 1946 kam es in den USA durch den Verlag Stechert ebenfalls zu fotografischen Neuauflagen des stereotypisierten Originals (dadurch mit den gleichen Fehlern) in den Formaten Folio und 8°.

Der Thesaurus von Vega von 1794 mit seinen 10stelligen Logarithmen stellte für viele Tafelmacher eine wichtige Referenz dar und wird immer wieder zitiert.

So auch in dem von Arnold Noah Lowan (1898 - ?1949; seit 1938 Technical Director Mathematical Tables Project, USA) beaufsichtigten und 1941 herausgegebenen 4bändigen Werkes der 16stelligen "Tables of Natural Logarithms", das sich auf die 48stelligen Logarithmen von Wolfram im Thesaurus bezieht. In diesem Projekt, das von der Federal Works Agency Works Project Administration for the City of New York ins Leben gerufen wurde, zeigt sich weiterhin der Wunsch der Wissenschaft nach möglichst genauen Logarithmenwerten.

1957 wurde in den USA das wohl genaueste Werk logarithmischer Tafeln von Bauschinger und Peters, die 10stelligen Tafeln von 1922, von Frederick Ungar Publishing Co. als 1:1 Kopie neu aufgelegt !

Die Bedeutung der vielen intensiven und genauen Berechnungen von Jean (Johann Theodor) Peters ist nicht zuletzt dadurch in ein herausragendes Licht gerückt worden, dass die Biographie von Peters neben der von Kepler als einzigem deutschen Tafelmacher von R.C. Archibald (1875 - 1956) in seiner Übersicht "Mathematical Table Makers"<sup>40</sup> aufgenommen wurde. Insgesamt bringt es der "rechnende" Astronom J. Peters, der für das Berliner Astronomische Jahrbuch und das Nautische Jahrbuch verantwortlich zeichnete, auf 24 Tafeln von wichtiger Bedeutung für die Astronomie.



Die bereits angesprochenen 20stelligen Tafeln von A.J. Thompson erlebten 1961 in Russland eine Neuauflage.

<p>БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ ВЫПУСК 15</p> <p>А. ТОМПСОН ТАБЛИЦЫ ДВАДЦАТИЗНАЧНЫХ ДЕСЯТИЧНЫХ ЛОГАРИФМОВ ЧИСЕЛ ТОМ I ЛОГАРИФМЫ ЧИСЕЛ ОТ 10 000 ДО 55 000</p> <p>Обработка таблиц и логарифмов: А. ПИДАКОВА И. Г. РАЙНОКОРТА и Л. И. САХОНОВА</p> <p>ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР АН СССР МОСКВА - 1961</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">N, 30100-32000</th> </tr> <tr> <th>N</th> <th>log N</th> <th>lg N</th> <th>lg N</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>30100</td><td>4.479563</td><td>4.479563</td><td>4.479563</td></tr> <tr><td>30101</td><td>4.479564</td><td>4.479564</td><td>4.479564</td></tr> <tr><td>30102</td><td>4.479565</td><td>4.479565</td><td>4.479565</td></tr> <tr><td>30103</td><td>4.479566</td><td>4.479566</td><td>4.479566</td></tr> <tr><td>30104</td><td>4.479567</td><td>4.479567</td><td>4.479567</td></tr> <tr><td>30105</td><td>4.479568</td><td>4.479568</td><td>4.479568</td></tr> <tr><td>30106</td><td>4.479569</td><td>4.479569</td><td>4.479569</td></tr> <tr><td>30107</td><td>4.479570</td><td>4.479570</td><td>4.479570</td></tr> <tr><td>30108</td><td>4.479571</td><td>4.479571</td><td>4.479571</td></tr> <tr><td>30109</td><td>4.479572</td><td>4.479572</td><td>4.479572</td></tr> <tr><td>30110</td><td>4.479573</td><td>4.479573</td><td>4.479573</td></tr> <tr><td>30111</td><td>4.479574</td><td>4.479574</td><td>4.479574</td></tr> <tr><td>30112</td><td>4.479575</td><td>4.479575</td><td>4.479575</td></tr> <tr><td>30113</td><td>4.479576</td><td>4.479576</td><td>4.479576</td></tr> <tr><td>30114</td><td>4.479577</td><td>4.479577</td><td>4.479577</td></tr> <tr><td>30115</td><td>4.479578</td><td>4.479578</td><td>4.479578</td></tr> <tr><td>30116</td><td>4.479579</td><td>4.479579</td><td>4.479579</td></tr> <tr><td>30117</td><td>4.479580</td><td>4.479580</td><td>4.479580</td></tr> <tr><td>30118</td><td>4.479581</td><td>4.479581</td><td>4.479581</td></tr> <tr><td>30119</td><td>4.479582</td><td>4.479582</td><td>4.479582</td></tr> <tr><td>30120</td><td>4.479583</td><td>4.479583</td><td>4.479583</td></tr> <tr><td>30121</td><td>4.479584</td><td>4.479584</td><td>4.479584</td></tr> <tr><td>30122</td><td>4.479585</td><td>4.479585</td><td>4.479585</td></tr> <tr><td>30123</td><td>4.479586</td><td>4.479586</td><td>4.479586</td></tr> <tr><td>30124</td><td>4.479587</td><td>4.479587</td><td>4.479587</td></tr> <tr><td>30125</td><td>4.479588</td><td>4.479588</td><td>4.479588</td></tr> <tr><td>30126</td><td>4.479589</td><td>4.479589</td><td>4.479589</td></tr> <tr><td>30127</td><td>4.479590</td><td>4.479590</td><td>4.479590</td></tr> <tr><td>30128</td><td>4.479591</td><td>4.479591</td><td>4.479591</td></tr> <tr><td>30129</td><td>4.479592</td><td>4.479592</td><td>4.479592</td></tr> <tr><td>30130</td><td>4.479593</td><td>4.479593</td><td>4.479593</td></tr> <tr><td>30131</td><td>4.479594</td><td>4.479594</td><td>4.479594</td></tr> <tr><td>30132</td><td>4.479595</td><td>4.479595</td><td>4.479595</td></tr> <tr><td>30133</td><td>4.479596</td><td>4.479596</td><td>4.479596</td></tr> <tr><td>30134</td><td>4.479597</td><td>4.479597</td><td>4.479597</td></tr> <tr><td>30135</td><td>4.479598</td><td>4.479598</td><td>4.479598</td></tr> <tr><td>30136</td><td>4.479599</td><td>4.479599</td><td>4.479599</td></tr> <tr><td>30137</td><td>4.479600</td><td>4.479600</td><td>4.479600</td></tr> <tr><td>30138</td><td>4.479601</td><td>4.479601</td><td>4.479601</td></tr> <tr><td>30139</td><td>4.479602</td><td>4.479602</td><td>4.479602</td></tr> <tr><td>30140</td><td>4.479603</td><td>4.479603</td><td>4.479603</td></tr> <tr><td>30141</td><td>4.479604</td><td>4.479604</td><td>4.479604</td></tr> <tr><td>30142</td><td>4.479605</td><td>4.479605</td><td>4.479605</td></tr> <tr><td>30143</td><td>4.479606</td><td>4.479606</td><td>4.479606</td></tr> <tr><td>30144</td><td>4.479607</td><td>4.479607</td><td>4.479607</td></tr> <tr><td>30145</td><td>4.479608</td><td>4.479608</td><td>4.479608</td></tr> <tr><td>30146</td><td>4.479609</td><td>4.479609</td><td>4.479609</td></tr> <tr><td>30147</td><td>4.479610</td><td>4.479610</td><td>4.479610</td></tr> <tr><td>30148</td><td>4.479611</td><td>4.479611</td><td>4.479611</td></tr> <tr><td>30149</td><td>4.479612</td><td>4.479612</td><td>4.479612</td></tr> <tr><td>30150</td><td>4.479613</td><td>4.479613</td><td>4.479613</td></tr> <tr><td>30151</td><td>4.479614</td><td>4.479614</td><td>4.479614</td></tr> <tr><td>30152</td><td>4.479615</td><td>4.479615</td><td>4.479615</td></tr> <tr><td>30153</td><td>4.479616</td><td>4.479616</td><td>4.479616</td></tr> <tr><td>30154</td><td>4.479617</td><td>4.479617</td><td>4.479617</td></tr> <tr><td>30155</td><td>4.479618</td><td>4.479618</td><td>4.479618</td></tr> <tr><td>30156</td><td>4.479619</td><td>4.479619</td><td>4.479619</td></tr> <tr><td>30157</td><td>4.479620</td><td>4.479620</td><td>4.479620</td></tr> <tr><td>30158</td><td>4.479621</td><td>4.479621</td><td>4.479621</td></tr> <tr><td>30159</td><td>4.479622</td><td>4.479622</td><td>4.479622</td></tr> <tr><td>30160</td><td>4.479623</td><td>4.479623</td><td>4.479623</td></tr> <tr><td>30161</td><td>4.479624</td><td>4.479624</td><td>4.479624</td></tr> <tr><td>30162</td><td>4.479625</td><td>4.479625</td><td>4.479625</td></tr> <tr><td>30163</td><td>4.479626</td><td>4.479626</td><td>4.479626</td></tr> <tr><td>30164</td><td>4.479627</td><td>4.479627</td><td>4.479627</td></tr> <tr><td>30165</td><td>4.479628</td><td>4.479628</td><td>4.479628</td></tr> <tr><td>30166</td><td>4.479629</td><td>4.479629</td><td>4.479629</td></tr> <tr><td>30167</td><td>4.479630</td><td>4.479630</td><td>4.479630</td></tr> <tr><td>30168</td><td>4.479631</td><td>4.479631</td><td>4.479631</td></tr> <tr><td>30169</td><td>4.479632</td><td>4.479632</td><td>4.479632</td></tr> <tr><td>30170</td><td>4.479633</td><td>4.479633</td><td>4.479633</td></tr> <tr><td>30171</td><td>4.479634</td><td>4.479634</td><td>4.479634</td></tr> <tr><td>30172</td><td>4.479635</td><td>4.479635</td><td>4.479635</td></tr> <tr><td>30173</td><td>4.479636</td><td>4.479636</td><td>4.479636</td></tr> <tr><td>30174</td><td>4.479637</td><td>4.479637</td><td>4.479637</td></tr> <tr><td>30175</td><td>4.479638</td><td>4.479638</td><td>4.479638</td></tr> <tr><td>30176</td><td>4.479639</td><td>4.479639</td><td>4.479639</td></tr> <tr><td>30177</td><td>4.479640</td><td>4.479640</td><td>4.479640</td></tr> <tr><td>30178</td><td>4.479641</td><td>4.479641</td><td>4.479641</td></tr> <tr><td>30179</td><td>4.479642</td><td>4.479642</td><td>4.479642</td></tr> <tr><td>30180</td><td>4.479643</td><td>4.479643</td><td>4.479643</td></tr> <tr><td>30181</td><td>4.479644</td><td>4.479644</td><td>4.479644</td></tr> <tr><td>30182</td><td>4.479645</td><td>4.479645</td><td>4.479645</td></tr> <tr><td>30183</td><td>4.479646</td><td>4.479646</td><td>4.479646</td></tr> <tr><td>30184</td><td>4.479647</td><td>4.479647</td><td>4.479647</td></tr> <tr><td>30185</td><td>4.479648</td><td>4.479648</td><td>4.479648</td></tr> <tr><td>30186</td><td>4.479649</td><td>4.479649</td><td>4.479649</td></tr> <tr><td>30187</td><td>4.479650</td><td>4.479650</td><td>4.479650</td></tr> <tr><td>30188</td><td>4.479651</td><td>4.479651</td><td>4.479651</td></tr> <tr><td>30189</td><td>4.479652</td><td>4.479652</td><td>4.479652</td></tr> <tr><td>30190</td><td>4.479653</td><td>4.479653</td><td>4.479653</td></tr> <tr><td>30191</td><td>4.479654</td><td>4.479654</td><td>4.479654</td></tr> <tr><td>30192</td><td>4.479655</td><td>4.479655</td><td>4.479655</td></tr> <tr><td>30193</td><td>4.479656</td><td>4.479656</td><td>4.479656</td></tr> <tr><td>30194</td><td>4.479657</td><td>4.479657</td><td>4.479657</td></tr> <tr><td>30195</td><td>4.479658</td><td>4.479658</td><td>4.479658</td></tr> <tr><td>30196</td><td>4.479659</td><td>4.479659</td><td>4.479659</td></tr> <tr><td>30197</td><td>4.479660</td><td>4.479660</td><td>4.479660</td></tr> <tr><td>30198</td><td>4.479661</td><td>4.479661</td><td>4.479661</td></tr> <tr><td>30199</td><td>4.479662</td><td>4.479662</td><td>4.479662</td></tr> <tr><td>30200</td><td>4.479663</td><td>4.479663</td><td>4.479663</td></tr> </tbody> </table>	N, 30100-32000				N	log N	lg N	lg N	30100	4.479563	4.479563	4.479563	30101	4.479564	4.479564	4.479564	30102	4.479565	4.479565	4.479565	30103	4.479566	4.479566	4.479566	30104	4.479567	4.479567	4.479567	30105	4.479568	4.479568	4.479568	30106	4.479569	4.479569	4.479569	30107	4.479570	4.479570	4.479570	30108	4.479571	4.479571	4.479571	30109	4.479572	4.479572	4.479572	30110	4.479573	4.479573	4.479573	30111	4.479574	4.479574	4.479574	30112	4.479575	4.479575	4.479575	30113	4.479576	4.479576	4.479576	30114	4.479577	4.479577	4.479577	30115	4.479578	4.479578	4.479578	30116	4.479579	4.479579	4.479579	30117	4.479580	4.479580	4.479580	30118	4.479581	4.479581	4.479581	30119	4.479582	4.479582	4.479582	30120	4.479583	4.479583	4.479583	30121	4.479584	4.479584	4.479584	30122	4.479585	4.479585	4.479585	30123	4.479586	4.479586	4.479586	30124	4.479587	4.479587	4.479587	30125	4.479588	4.479588	4.479588	30126	4.479589	4.479589	4.479589	30127	4.479590	4.479590	4.479590	30128	4.479591	4.479591	4.479591	30129	4.479592	4.479592	4.479592	30130	4.479593	4.479593	4.479593	30131	4.479594	4.479594	4.479594	30132	4.479595	4.479595	4.479595	30133	4.479596	4.479596	4.479596	30134	4.479597	4.479597	4.479597	30135	4.479598	4.479598	4.479598	30136	4.479599	4.479599	4.479599	30137	4.479600	4.479600	4.479600	30138	4.479601	4.479601	4.479601	30139	4.479602	4.479602	4.479602	30140	4.479603	4.479603	4.479603	30141	4.479604	4.479604	4.479604	30142	4.479605	4.479605	4.479605	30143	4.479606	4.479606	4.479606	30144	4.479607	4.479607	4.479607	30145	4.479608	4.479608	4.479608	30146	4.479609	4.479609	4.479609	30147	4.479610	4.479610	4.479610	30148	4.479611	4.479611	4.479611	30149	4.479612	4.479612	4.479612	30150	4.479613	4.479613	4.479613	30151	4.479614	4.479614	4.479614	30152	4.479615	4.479615	4.479615	30153	4.479616	4.479616	4.479616	30154	4.479617	4.479617	4.479617	30155	4.479618	4.479618	4.479618	30156	4.479619	4.479619	4.479619	30157	4.479620	4.479620	4.479620	30158	4.479621	4.479621	4.479621	30159	4.479622	4.479622	4.479622	30160	4.479623	4.479623	4.479623	30161	4.479624	4.479624	4.479624	30162	4.479625	4.479625	4.479625	30163	4.479626	4.479626	4.479626	30164	4.479627	4.479627	4.479627	30165	4.479628	4.479628	4.479628	30166	4.479629	4.479629	4.479629	30167	4.479630	4.479630	4.479630	30168	4.479631	4.479631	4.479631	30169	4.479632	4.479632	4.479632	30170	4.479633	4.479633	4.479633	30171	4.479634	4.479634	4.479634	30172	4.479635	4.479635	4.479635	30173	4.479636	4.479636	4.479636	30174	4.479637	4.479637	4.479637	30175	4.479638	4.479638	4.479638	30176	4.479639	4.479639	4.479639	30177	4.479640	4.479640	4.479640	30178	4.479641	4.479641	4.479641	30179	4.479642	4.479642	4.479642	30180	4.479643	4.479643	4.479643	30181	4.479644	4.479644	4.479644	30182	4.479645	4.479645	4.479645	30183	4.479646	4.479646	4.479646	30184	4.479647	4.479647	4.479647	30185	4.479648	4.479648	4.479648	30186	4.479649	4.479649	4.479649	30187	4.479650	4.479650	4.479650	30188	4.479651	4.479651	4.479651	30189	4.479652	4.479652	4.479652	30190	4.479653	4.479653	4.479653	30191	4.479654	4.479654	4.479654	30192	4.479655	4.479655	4.479655	30193	4.479656	4.479656	4.479656	30194	4.479657	4.479657	4.479657	30195	4.479658	4.479658	4.479658	30196	4.479659	4.479659	4.479659	30197	4.479660	4.479660	4.479660	30198	4.479661	4.479661	4.479661	30199	4.479662	4.479662	4.479662	30200	4.479663	4.479663	4.479663	<p>Das Tafelblatt stammt aus der Originalausgabe von 1937.</p>
N, 30100-32000																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														
N	log N	lg N	lg N																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30100	4.479563	4.479563	4.479563																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30101	4.479564	4.479564	4.479564																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30102	4.479565	4.479565	4.479565																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30103	4.479566	4.479566	4.479566																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30104	4.479567	4.479567	4.479567																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30105	4.479568	4.479568	4.479568																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30106	4.479569	4.479569	4.479569																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30107	4.479570	4.479570	4.479570																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30108	4.479571	4.479571	4.479571																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30109	4.479572	4.479572	4.479572																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30110	4.479573	4.479573	4.479573																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30111	4.479574	4.479574	4.479574																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30112	4.479575	4.479575	4.479575																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30113	4.479576	4.479576	4.479576																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30114	4.479577	4.479577	4.479577																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30115	4.479578	4.479578	4.479578																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30116	4.479579	4.479579	4.479579																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30117	4.479580	4.479580	4.479580																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30118	4.479581	4.479581	4.479581																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30119	4.479582	4.479582	4.479582																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30120	4.479583	4.479583	4.479583																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30121	4.479584	4.479584	4.479584																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30122	4.479585	4.479585	4.479585																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30123	4.479586	4.479586	4.479586																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30124	4.479587	4.479587	4.479587																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30125	4.479588	4.479588	4.479588																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30126	4.479589	4.479589	4.479589																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30127	4.479590	4.479590	4.479590																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30128	4.479591	4.479591	4.479591																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30129	4.479592	4.479592	4.479592																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30130	4.479593	4.479593	4.479593																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30131	4.479594	4.479594	4.479594																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30132	4.479595	4.479595	4.479595																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30133	4.479596	4.479596	4.479596																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30134	4.479597	4.479597	4.479597																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30135	4.479598	4.479598	4.479598																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30136	4.479599	4.479599	4.479599																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30137	4.479600	4.479600	4.479600																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30138	4.479601	4.479601	4.479601																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30139	4.479602	4.479602	4.479602																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30140	4.479603	4.479603	4.479603																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30141	4.479604	4.479604	4.479604																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30142	4.479605	4.479605	4.479605																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30143	4.479606	4.479606	4.479606																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30144	4.479607	4.479607	4.479607																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30145	4.479608	4.479608	4.479608																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30146	4.479609	4.479609	4.479609																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30147	4.479610	4.479610	4.479610																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30148	4.479611	4.479611	4.479611																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30149	4.479612	4.479612	4.479612																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30150	4.479613	4.479613	4.479613																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30151	4.479614	4.479614	4.479614																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30152	4.479615	4.479615	4.479615																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30153	4.479616	4.479616	4.479616																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30154	4.479617	4.479617	4.479617																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30155	4.479618	4.479618	4.479618																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30156	4.479619	4.479619	4.479619																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30157	4.479620	4.479620	4.479620																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30158	4.479621	4.479621	4.479621																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30159	4.479622	4.479622	4.479622																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30160	4.479623	4.479623	4.479623																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30161	4.479624	4.479624	4.479624																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30162	4.479625	4.479625	4.479625																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30163	4.479626	4.479626	4.479626																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30164	4.479627	4.479627	4.479627																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30165	4.479628	4.479628	4.479628																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30166	4.479629	4.479629	4.479629																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30167	4.479630	4.479630	4.479630																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30168	4.479631	4.479631	4.479631																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30169	4.479632	4.479632	4.479632																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30170	4.479633	4.479633	4.479633																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30171	4.479634	4.479634	4.479634																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30172	4.479635	4.479635	4.479635																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30173	4.479636	4.479636	4.479636																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30174	4.479637	4.479637	4.479637																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30175	4.479638	4.479638	4.479638																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30176	4.479639	4.479639	4.479639																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30177	4.479640	4.479640	4.479640																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30178	4.479641	4.479641	4.479641																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30179	4.479642	4.479642	4.479642																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30180	4.479643	4.479643	4.479643																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30181	4.479644	4.479644	4.479644																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30182	4.479645	4.479645	4.479645																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30183	4.479646	4.479646	4.479646																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30184	4.479647	4.479647	4.479647																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30185	4.479648	4.479648	4.479648																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30186	4.479649	4.479649	4.479649																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30187	4.479650	4.479650	4.479650																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30188	4.479651	4.479651	4.479651																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30189	4.479652	4.479652	4.479652																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30190	4.479653	4.479653	4.479653																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30191	4.479654	4.479654	4.479654																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30192	4.479655	4.479655	4.479655																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30193	4.479656	4.479656	4.479656																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30194	4.479657	4.479657	4.479657																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30195	4.479658	4.479658	4.479658																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30196	4.479659	4.479659	4.479659																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30197	4.479660	4.479660	4.479660																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30198	4.479661	4.479661	4.479661																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30199	4.479662	4.479662	4.479662																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
30200	4.479663	4.479663	4.479663																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											

Diese Aktivitäten in den beiden Großmächten sind wohl den ausgefeilten Anforderungen und Genauigkeiten der im Aufwind befindlichen Weltraumforschung zuzuschreiben.

<sup>40</sup> Archibald, Raymond Clare; Mathematical Table Makers; Scripta Mathematica, New York 1948

## 8 Einsatz der Rechenschieber

Sammlerfreund Werner Rudowski machte mich auf einen "Satellite Sliding Rule" von John Bevis (1695 - 1771; Arzt und Amateur-Astronom) aufmerksam, der in einem Nachruf auf Bevis erwähnt wurde. Zu diesem "Satellite Sliding Rule" sind keine weiteren Einzelheiten bekannt.

Im Jahr 1907 wurde ein Patent von Robert Nelting<sup>41</sup> über einen Rechenschieber mit zwei austauschbaren Zungen veröffentlicht. Später startete Nelting mit der Firma Dennert&Pape in Hamburg Projekte zur Herstellung von Rechenschiebern, mit denen vielfältige astronomische Berechnungen durchführbar sein sollten. Dazu wurden die Werte/Ziffern, die bislang in den Tafelwerken erschienen waren, auf einen Rechenstabskörper übertragen.

	<p>No. 28. Azimut-Stab.</p> <p>28. Azimut-Stab zur schnellen Bestimmung der wahren Richtungen der Sonne, des Mondes, der Planeten und aller Sterne auf allen Breiten. D. R. G. M. Mahagonitolz, Teilung auf Celluloid, 28 cm lang. Preis mit Futteral und Anleitung M 14.—</p> <p>Der Azimut-Stab, dessen Entwurf auf der bekannten Merkatorstreckung der Sechsten beruht, dient zur schnellen Feststellung der wahren Richtungen aller Gestirne auf deren Standorten auf allen Breiten von Pol zu Pol, bei beliebigem Stundenwinkel von 0° bis Ost bzw. West und Abweichung (Declination) der Gestirne von 90° Nord und Süd, einschliesslich Polarstern (Nordstern) und <math>\alpha</math> Centauri (Südstern).</p> <p>Die Handhabung dieses Stabes ist sehr einfach und erfolgt an der Hand des auf der Rückseite des Stabes gedruckten Gebrauchsanweisung. Die Bestimmung der Azimute ist schnell und sicher durchzuführen und die Genauigkeit der erhaltenen Azimute ist gleich der des besten Azimut-Tafels.</p> <p>Da der Azimut-Stab an keine Grenzen der Breite, des Stundenwinkels und der Abweichung der Gestirne gebunden ist und in allen Fällen das Azimut schnell und sicher ergibt, ist er den bisherigen Hilfsmitteln weit überlegen, umso mehr, da er die verschiedensten und verschiedenartigen Hilfsmittel und deren verschiedenartige Gebrauchsanweisung mit grossem Vorteil ersetzt und den Gebrauch der verschiedenen Azimut-Tafeln, Diagramme und Rechnungen überflüssig macht.</p> <p>Der Azimut-Stab vereinfacht und vereinfacht, beschleunigt und erleichtert die Bestimmung der wahren Richtung der Gestirne in allen Fällen und ist somit das einfachste, solideste und praktischste Instrument, welches dem Nautiker für wenig Geld den grössten Nutzen bietet, bei suboptimaler Gebrauchsdauer.</p> <p style="text-align: right;">42</p>
	<p>No. 30. Gestirns-Höhen-Azimut-Rechenstab.</p> <p>30. Neuer Gestirns-Höhen-Azimut-Rechenstab, D. R. G. M. Teilung auf Celluloid, 28 cm lang. Preis per Stück M 36.—</p> <p>Dieser Rechenstab dient zur schnellen und sicheren Bestimmung der Höhen und Höhen-Azimute der Sonne, des Mondes, der Planeten und aller Gestirne auf allen Breiten. Der Rechenstab ermöglicht die Durchführung der Ortsbestimmung auf der Erdoberfläche nach der Höhenmethode St. Marc Hillaire mit der für die Nautische Praxis ausreichenden Genauigkeit. Man kann auf schnelle und einfache Art auf allen Breiten und für alle Gestirne die Höhen und Höhen-Azimute der Gestirne, oder auch die Bestimmung des Namens eines unbekanntes beobachteten Gestirns feststellen.</p> <p>Die einfache Handhabung, die unbegrenzte Verwendbarkeit, die erreichbare Schnelligkeit sowie die große Genauigkeit bieten dem Verbraucher große Vorteile und Zeitersparnis.</p> <p style="text-align: right;">42</p>

Durch die große Anzahl der dadurch entstehenden Skalen war der "Nautisch-Astronomische und Universal-Rechenstab" von Nelting "übersät" (siehe unten) mit Skalen und Ziffern, wurde unübersichtlich und die Handhabung erforderte sehr viel Geschick und Übung. Das führte dazu, dass dieser mit 140 ReichsMark recht hochpreisige Rechenstab in nur geringer Auflage entstanden ist und daher heute - wie auch die anderen Modelle - zu den gefragten Modellen einer Rechenschieber-Sammlung zählt.

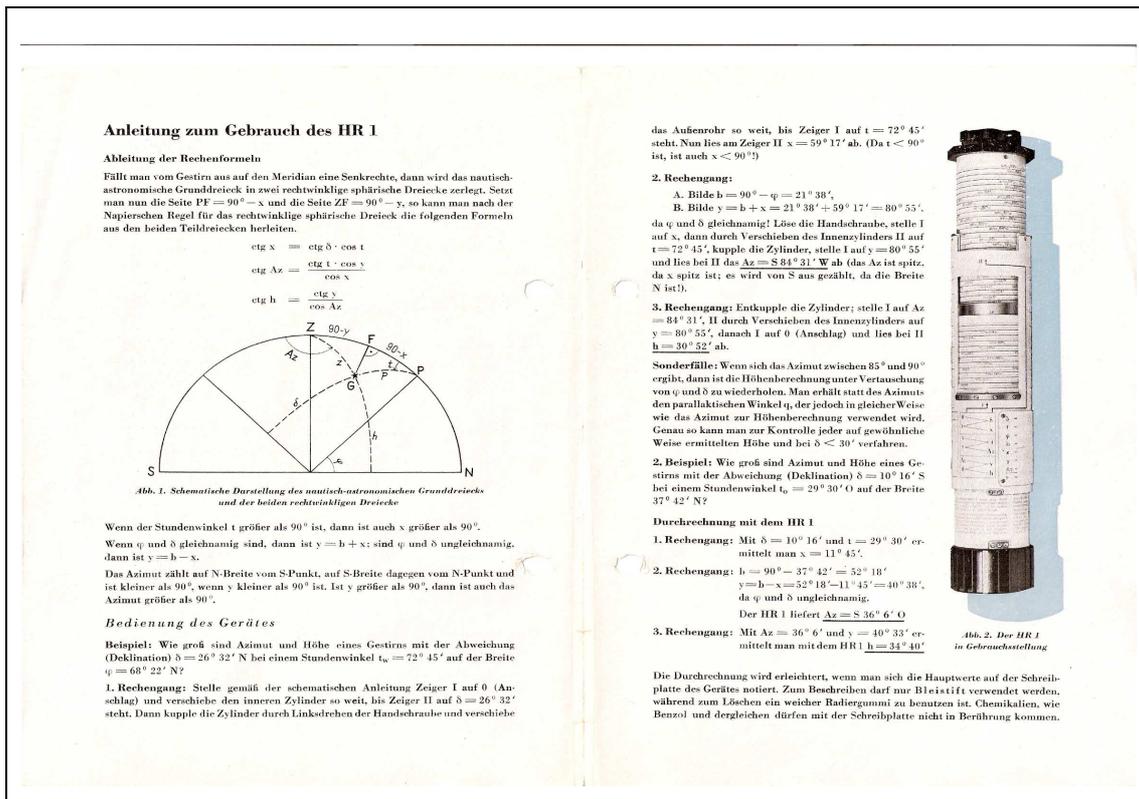
	<p>Der Nautisch-Astronomische und Universal-Rechenstab von R. NELTING.</p> <p>Vorderseite des Instruments.</p> <p>Rückseite des Instruments.</p>
--	--

<sup>41</sup> Kugel, Günter; The Nautical Slide Rules No 28 - 31 in the D&P-catalogue of 1914; in Dennert&Pape Aristo 1872 - 1978, Hrsg K. Kühn und K. Kleine; Zuckschwerdt Verlag, München 2004

<sup>42</sup> Abbildungen aus dem Katalog der Firma Dennert&Pape von 1914, ibid.

Weitere astronomisch-nautische Rechenstäbe von Dennert&Pape, die auch zu den eher seltenen Exemplaren gehören, wurden von den Professoren Maurer (nautisch # 27) und Kohlschütter (aeronautisch # 31) entworfen.

Demgegenüber hat sich ein zylindrischer Rechenschieber eines Captain Bygrave<sup>43</sup> größerer internationaler Beliebtheit erfreut, so dass er später in modifizierten Formen von der Firma Dennert&Pape als Höhenrechenschieber HR 1 und HR 2 hergestellt wurde. Diese Rechenschieber des Typs "Bygrave" wurden in der Astronavigation zur Standortbestimmung auf hoher See eingesetzt.



<sup>43</sup> Riet, Ronald von; Position Line Slide Rules: Bygrave and Höhenrechenschieber; Seite 8-34, Proceedings IM 2008

## 9 Andere Anwendungen der Logarithmen in der Astronomie

### Magnitude oder Größenklasse <sup>44</sup>

Die Magnitude ist die in der Astronomie übliche Einheit für die Helligkeit von Objekten. Magnitude ist lateinisch und heißt übersetzt Größe. Eingeführt wurde sie von Hipparch im ersten Jahrhundert vor Christus. Hipparch teilte die Sterne in 6 Helligkeiten ein und gab dem hellsten Stern die Größe (Magnitude) 1 und dem schwächsten gerade sichtbaren Stern die Zuordnung 6. Größe.

Diese Zuordnung führt dazu, daß entgegen der Intuition ein hellerer Stern eine kleinere Magnitude hat.

Heutzutage ist eine rein subjektive Zuordnung der Helligkeit von Sternen natürlich nicht mehr gewünscht, sondern man möchte eine reproduzierbare Skala haben. Da das Auge im Wesentlichen **logarithmisch\*** arbeitet (doppelt so heller Eindruck entspricht nicht doppelt soviel Licht sondern eher 2,5 Mal), ist der Zusammenhang heute wie folgt definiert:

$$m = - 2,5 * \log(F / F_0)$$

hierbei ist  $F$  der wirkliche Strahlungsstrom, d.h. wieviel Energie pro Zeit bei uns ankommt.  $F_0$  ist eine Konstante, die uns festlegt, welchem Stern wir 0. Größe zuweisen. **Wega\*\*** hat bspw. die Magnitude 0,2 und wird u.a. zur Kalibrierung dieses Nullpunktes genommen.

Was wir jetzt gemessen bzw. gesehen haben, ist die Intensität derjenigen Strahlung, die bei uns ankommt. In der Realität sind die Sterne aber unterschiedlich weit weg, so daß zwei in Wirklichkeit total unterschiedlich helle Sterne hier auf der Erde als gleich hell wahrgenommen werden können. Darum spricht man bei der obigen Definition auch von der scheinbaren Helligkeit.

Um verschiedene Sterne in ihrer Helligkeit miteinander zu vergleichen, müßte man die Sterne alle in derselben Entfernung verschieben und dann ihre Helligkeiten vergleichen. Zum Glück kann man das machen ohne wirklich Sterne zu verschieben, wenn man die Entfernung zu den einzelnen Sternen kennt. Wie beim Gravitationsgesetz die Anziehungskraft mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt, so nimmt auch die Helligkeit (Strahlungsstrom) einer Lichtquelle mit der Entfernung quadratisch ab. Man definiert also die absolute Helligkeit  $M$  als

$$M = m - 5 * \log (r / 10pc).$$

Hierbei ist  $r$  die Entfernung des Sterns und  $m$  dessen scheinbare Helligkeit. Die Entfernung dividiert man laut Konvention durch 10 Parsec; d.h. man guckt sich die Sterne an als ob sie alle in 10pc Entfernung stünden.

\* Zur Verdeutlichung die Tabelle aus <sup>45</sup>

1	2	3	4	5
2,51	6,3	16	40	100
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5
251	630	1600	4000	10000

Und hierbei geht es <sup>46</sup> "um das Fechner'sche Gesetz, dieses physiologische und für die Astronomie wichtige Gesetz. Um das zu verstehen, mache man folgendes Gedankenexperiment: man beleuchte eine Wand einmal mit zwei Lampen und dann mit 100 Lampen. Lösche ich nun die beiden Lichtquellen um je eine Lampe, so bemerkt das menschliche Auge nur im ersten Fall einen Helligkeitsunterschied. Wenn wir aber die Lichtquellen im gleichen Verhältnis schwächen, reagiert unser Sehen sofort darauf. Diesem Experiment liegt das von G. Th. Fechner (Physiker, Philosoph und humorvoller Dichter) 1860 veröffentlichte Gesetz zu Grunde. Danach ist die Empfindung proportional dem Logarithmus des Reizes. Im menschlichen Auge kommen demnach nicht die

<sup>44</sup> <http://www.vega-astro.de/index.php/Lexikon/Magnitude>

<sup>45</sup> <http://astrofotografie.hohmann-edv.de/grundlagen/sternhelligkeiten.php>

<sup>46</sup> Müller, Rolf; Astronomische Begriffe; Hochschultaschenbücher, Bibliografisches Institut Mannheim 1964

*Intensitäten, sondern ihre Logarithmen zur Wahrnehmung. In der Astronomie hat man von alters her den Helligkeitseindruck, den die Sterne auf unsere Sinne machen, zunächst durch sechs Klassen, die Sterngrößen, ausgedrückt und diese Helligkeitsskala später auch auf die mit bloßem Auge nicht mehr sichtbaren Sterne ausgedehnt. Dieser Helligkeitsskala liegt das Fechnersche Gesetz zu Grunde. Für das Helligkeitsverhältnis zweier aufeinanderfolgenden Größenklassen, das als konstant anzusehen ist, ergab sich etwa die Zahl 2.5. Sie wird, da  $\log 2.512$  gleich 0.4 ist, der Einfachheit halber jetzt zu  $2.512 [= 10^{0.4}]$  angenommen."*

**\*\*** Die Vega (deutsch Wega) ist mit einer Helligkeit von 0,03 mag der hellste Stern am Sommerhimmel und somit der erste Stern, den man bereits in der Abenddämmerung sehen kann<sup>47</sup>.

*Die Bedeutung des Sternnamens ist nicht ganz klar: Richtig wird allgemein die Schreibweise "Wega" erachtet, obgleich insbesondere international durch das Englische eher die Schreibweise mit "V" verbreitet ist. Möglicherweise kommt das Wort vom arabischen Wort Waki für Adler/ aus der Redewendung "der schnappende Adler". Der Stern hieß bisweilen Waghi (Scaliger), Vuela vel Vagieh (Riccioli), Veka (Assemani), bei den Griechen und Römern Lyra, Fidis (bei Cicero), Fides (Plinius) oder Fidicula und im 16. Jh im Almagest auch Allore, Alahore, Alohere oder einfach Leier-Stern (in Hollands Übersetzung).*

*Bisweilen wurde der Stern mit dem babylonischen Dilgan (Lichtbote) identifiziert, andernorts mit dem akkadischen Tir-anna (himmlisches Leben) oder dem assyrischen Dayan-same (Gericht des Himmels)<sup>42</sup>.*

Somit bezieht sich die Bezeichnung des Sterns nicht auf Georg Freiherr von VEGA.

---

<sup>47</sup> <http://www.epsilon-lyrae.de/Doppelsterne/Galerie/Lyra.html>

## 10 Zusammenfassung

Die Entwicklung mathematischer Tafeln lässt sich nach John Fauvel (1947 - 2001) <sup>48</sup> in 4 Perioden einteilen

Zeitperiode	Inhalte
2500 BC - 150 AD	"invention of the table as a concept and its realization in a number of forms for different purposes"
150 AD - 1600	"great achievements of the human mind, in the astronomical and trigonometric tables which lay the heart of progress in the hard sciences leading up to the scientific revolution"
1600 - 1850	"heyday of work on logarithmic tables which formed the basis of calculation needs for the industrial revolution"
> 1850	"production of a range of ever more sophisticated tables for physical, mathematical, industrial, and economic purposes, as well as the development of technology to help in their calculations"

und hat sich durch die in dieser Arbeit zur Bedeutung der Logarithmen in der Astronomie gemachten Ausführungen bestätigt.

Rechentafeln hat es bereits in der frühen Menschheitsgeschichte gegeben und die Entwicklung der Logarithmen und deren Tabulierung war ein logischer Schritt, der sich auf Grund des technischen Fortschrittes im 17. Jahrhundert ergab, um den Wissenschaftlern, Astronomen, Landvermessern, Navigatoren und Kaufleuten als Rechnungshilfe zur Verfügung zu stehen.

In dieser Arbeit wird an Hand einiger Beispiele dargestellt, wie sich im Laufe von über 350 Jahren die Logarithmen(-Tafeln) zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel für viele Berechnungen aus etlichen Bereichen von Wissenschaft und Technik - insbesondere der Astronomie - entwickelt haben. Die Tafeln enthielten zunächst ausführliche Anleitungen, Rechenbeispiele und Erläuterungen und wurden immer genauer (hochstellig; Detaillierung der Gradeinteilung) und dadurch umfangreicher. Später ging es dann hauptsächlich um Korrektheit der Werte sowie Handhabung und Übersichtlichkeit der Tafeln bevor sich deren Inhalte auf die Darstellung der Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen (ab ca. 1850) beschränkte. Für die speziellen Anwendungen der einzelnen Fachbereiche wurden entsprechende eigene - logarithmisch errechnete - Tafelwerke erstellt, in denen keine Logarithmen mehr aufgeführt waren (Ephemeridentafeln für Astronomen; Navigationstafeln für Seeleute; Zinstafeln für Kaufleute).

Bekanntlich wurden die Logarithmentafeln zusammen mit den Rechenschiebern durch die Vermarktung der Taschenrechner in den 1970er Jahren und später von Computerprogrammen aus dem Alltag verbannt. Daher haben jüngere Menschen oftmals keine Vorstellung von der Bedeutung der Logarithmen und der Rechenschieber.

Aus diesem Grunde erachte ich es als unbedingt notwendig, von Zeit zu Zeit an die fast 400jährige Geschichte des Rechnens mit den Logarithmen zu erinnern. Dies besonders unter dem Eindruck, dass inzwischen das Thema Logarithmen in der Schule gar nicht mehr auf dem Lehrplan erscheinen soll. Wegen der besonderen Bedeutung der Logarithmen für viele Fach- und Lebensbereiche (siehe Addendum 3) und nicht zuletzt vor dem Hintergrund des 400. Geburtstages der ersten Logarithmentafel von John Napier, Lord of Merchiston im Jahr 2014, sollten die Logarithmen, die als Rechenhilfsmittel wesentlich zu den heutigen Errungenschaften beitrugen, entsprechend gewürdigt werden.

***"Die Erfindung der Logarithmen kürzt monatelang währende Berechnungen bis auf wenige Tage ab und verdoppelt dadurch sozusagen das Leben (der Rechner)."***

Marquis Pierre-Simon de Laplace (1749 - 1827, französischer Mathematiker und Astronom)

Dr. Klaus Kühn, Beitrag zur IM 2009 <sup>49</sup>

<sup>48</sup> The History of Mathematical Tables - From Sumer to Spreadsheets; M. Campbell-Kelly, M. Croarken, R. Flood, E. Robson; Oxford University Press 2003 - Seite 2

<sup>49</sup> Anmerkung: Aufgrund der Verkleinerung sind manche Abbildungen kaum oder nur schlecht zu lesen. Interessierte Leser können sich wegen der Originale gerne an mich wenden; [kk@iasim.de](mailto:kk@iasim.de)

## 11 Addendum

**Addendum 1: From "Short Course in Spherical Trigonometry" by Pauline Sperry; Johnson Publishing Company, Richmond 1928, page 48 ff**

### HISTORICAL SKETCH

TRIGONOMETRY really originated among the Greeks though they drew on Babylonian and Egyptian sources. That it developed to meet the needs of the astronomers accounts for the remarkable fact that spherical trigonometry made its appearance before plane trigonometry. Hipparchus of Nicaea (161-126 B.C.), the greatest astronomer among the ancients, knew how to solve spherical triangles by arithmetical and graphical methods. The oldest textbook known in spherical trigonometry is the *Sphaerica* by Menelaus of Alexandria (about 98 A.D.). This has come down to us only through translation into Arabic, Hebrew, and Latin. In it appeared for the first time a real theory of spherical triangles fully detached from astronomy and developed in a proper sequence like Euclid's *Elements*. Definitions and properties of spherical triangles, the theorem concerning the upper and lower bounds of the sum of the angles of a triangle, and theorems about congruence are given.

The celebrated astronomer, Ptolemy (about 125-151 A.D.), collected the work of his predecessors, improved upon it, and made additions of his own in the *Almagest*, a work which is extant and which governed trigonometric knowledge for a thousand years. It is principally concerned with astronomical investigations. But Ptolemy did not present a system of trigonometry, that is, he gave no rules nor formal methods of solution. He merely showed how to solve particular examples including four of the six cases of right triangles, to the solution of which he reduced all astronomical problems.

After Ptolemy trigonometry passed into other than Greek hands. The Hindus, a people naturally drawn to mathematical and astronomical studies by their religion, had come in contact with Greek learning. While it is possible that they invented the beginnings of trigonometry for themselves, it is probable that they built on the foundations laid by the Greeks. Their writings, which served only astronomical ends, gave formulas and theorems but no proofs. To them we owe the introduction of the sine, cosine, and versed sine, while the other four fundamental trigonometric functions were introduced by the Arabs.

The Arabs, who had rapidly developed from a wandering desert tribe into a highly cultured people, were the heirs to Greek knowledge and made it their own by many translations and commentaries. Among the East Arabs, Al Battani (929 A.D.), a famous astronomer of Bagdad, in his work *De scientia stellarum*, gave all the formulas found in the *Almagest*. Here appears for the first time the fundamental law of cosines for sides of oblique spherical triangles and the law of sines for right triangles. The latter was generalized for oblique triangles by Alhogenidi about 970 A.D.

The East and West Arabs were under separate governments. The development of science in Spain was quite independent of that in Persia, due in part to the great distance between Bagdad and Cordova, the center of learning of the West Arabs. Geber of Seville (between 1140 and 1150 A.D.) was the first to treat spherical trigonometry in its continuity. To Ptolemy's four fundamental formulas for the solution of right spherical triangles he added a fifth of his own,  $\cos B = \cos b \sin A$ , which is often called "Geber's Theorem." Unlike most of the Arabs he gave examples illustrating his theorems. Nasir Eddin (1201-1274) made the last Arab contribution to spherical trigonometry. He treated plane and spherical trigonometry as ends in themselves and not merely as an aid to astronomy. His historical and critical method is of the greatest value. The problems of right and oblique spherical triangles were exhaustively treated and brought to complete solution if not always by the shortest method. He introduced the polar triangle to solve the case when three angles are given, a method which was rediscovered by Vieta in 1593. His great work remained unfruitful and has only recently been rescued from oblivion and accorded the recognition which it deserves.

A new era opened in Europe with Johannes Müller, better known as Regiomontanus (1436-1476). The desire for free and independent judgment in religious matters, which culminated in the reformation, was accompanied by scientific investigation in which Germany led for a time. Regiomontanus accomplished for the western world what Nasir Eddin had done for the eastern world two hundred years before. His *De triangulis omnimodis* gave the first systematic treatment of trigonometry independent of astronomy in the western world and dominated the later middle ages to a remarkable degree. He took the *Almagest* as his starting point and connected it with the Arabic writings, but the results are so saturated with his spirit as to seem wholly new. He died before completing his great work, which was published a generation later. His manuscript fell into the hands of Johannes Werner (1468-1528). Werner realized its great value, and regretting the fact that it was incomplete started to write a spherical trigonometry himself. The manuscript, though unfinished, exerted an influence on the further development of the subject.

If not entirely independent of the work of his predecessors, Copernicus (1473-1543) developed for himself, in the main, the trigonometric foundations for his astronomical theory in his *De revolutionibus orbium coelestium*. He made it possible to avail himself of plane trigonometry by using the plane triangles formed by drawing perpendiculars from the vertices of the spherical triangle to the radii of the sphere. Though the Arabs had applied the ideas of solid angles in their theorems Copernicus had no knowledge of that fact. His friend Rheticus (1514-1576) developed these methods further.

To Vieta (1540-1603), a Frenchman, we owe the first systematic treatment in the western world of the method of solution of spherical triangles based on all six of the trigonometric functions. His sixth formula for the solution of right triangles was new as was also his use of reciprocal representation between general formulas for oblique triangles. Romanus of Louvain (1561-1615) reduced the twentyeight cases of oblique triangles then considered to only six by means of certain projections. His successors worked for the simplification of computations, an effort which in 1614 culminated in Napier's tables of logarithms. From then on it became necessary to get formulas in which sums and differences were changed into products. Napier (1550-1617), a Scottish philosopher, himself discovered two of the analogies which bear his name, the other two having been added by Briggs, a contemporary of his. He also gave the rules for circular parts for the solution of right triangles.

Symbolic algebra entered slowly into trigonometry. In the eighteenth century, however, it took a more analytic form. Friedrich Opper's *Analysis triangulorum* (1746) was the first complete work in analytic trigonometry. The texts of the sixteenth and seventeenth centuries show a tiresome prolixity in handling all possible cases of triangles. Rheticus gave a hundred and thirty rules for the solution of the right spherical triangle alone. Indeed in his time it was regarded as a creditable performance. Opper derived all the formulas for solving spherical triangles from three, the law of sines and the two laws of cosines.

Trigonometry first took on its modern form with Euler (1707-1783), making easier and simpler applications possible. He introduced simple stereographic projections which play an important role today. In 1753 he first drew attention to the connection between plane and spherical trigonometry. The generalization of spherical triangles to cases where the sides and angles are not limited occupied Gauss in 1809, Möbius in 1843, and O. Stolz, with the help of analytic geometry, in 1871. E. Study first gave full clarity to modern spherical trigonometry in his fundamental work of 1893.

Addendum 2:

5. Übersicht des Textinhaltes.

**Buch I.**  
Diskussion des sphärischen Dreiecks.  
(ABC sphärisches Dreieck mit Seiten a, b, c.)

Satz	Wenn	so ist	Vgl.
1	$B = C = 90^\circ$	$b = c = 90^\circ$	GI, I, 11, 8; NV, III, 11-III, 11; & $\beta$ -7; RIV, 31, 4 & 6; O III, 1.
2 <sup>1)</sup>	$B = b = 90^\circ$ $c < 90^\circ$	$A = a = 90^\circ$	GI, I, 11, 11, 14 RIV, 51 & 71 O III, 13 & 38 - 39.
4	$b = c < 90^\circ$	$B = C < 90^\circ$	MI, 2 RIV, 10 inv. CI, 14, IX, O III, lemma III.
5	$b = c > 90^\circ$	$B = C > 90^\circ$	MI, 2 RIV, 11 inv. CI, 14, IX, O III, lemma III.
3	$\nabla$	$\nabla$	MI, 21, GI, 11 <sup>o</sup> , NV, III, IV, lemma RIV, 4 <sup>o</sup> , O III, lemma I & 34.
6 <sup>1)</sup>	$\nabla$	$\nabla$	GI, 11 <sup>o</sup> - 3, O III, 32.
7	$A = 90^\circ$ $b > 90^\circ$ $c < 90^\circ$	$a > 90^\circ$ $B > 90^\circ$ $C < 90^\circ$	GI, 11 <sup>o</sup> ; RIV, 4 <sup>o</sup> ; O III, 36, O III, 33.
8	$\nabla$	$\nabla$	O III, 33.
9	$\nabla$	$\nabla$	GI, 11 <sup>o</sup> ; RIV, 4 <sup>o</sup> ; O III, 35.
10	$\nabla$	$\nabla$	N V, III, IV lemma.
11	$A < 90^\circ$ $b = 90^\circ$ $c = 90^\circ$	$a = 90^\circ$ $B = 90^\circ$ $C = 90^\circ$	O III, 44
12	$\nabla$	$\nabla$	O III, 48.
13	$\nabla$	$\nabla$	O III, 45.
14	$\nabla$	$\nabla$	MI, 21, O III, 58.
15	$\nabla$	$\nabla$	O III, 56.
16 <sup>1)</sup>	$A > 90^\circ$ $b > 90^\circ$ $c < 90^\circ$	$a > 90^\circ$ $B > 90^\circ$ $C < 90^\circ$	O III, 60.
17	$\nabla$	$\nabla$	O III, 57.
18	$\nabla$	$\nabla$	O III, 59.
19-20 <sup>1)</sup>	Konstruktive Hilfsätze.		
21	$\nabla$	$\nabla$	MI, 22, GI, I, 11, 12, 15, RIV, 5 <sup>o</sup> & 7 <sup>o</sup> ; O III, 40.
22 <sup>1)</sup>	$B = 90^\circ$	$b = 90^\circ$	GI, 11, 13, 16, RIV, 5 <sup>o</sup> & 7 <sup>o</sup> ; O III, 42.
23 <sup>1)</sup>	$\nabla$	$\nabla$	GI, 11 <sup>o</sup> ; RIV, 4 <sup>o</sup> .
24 <sup>1)</sup>	$\nabla$	$\nabla$	O III, 52.
25 <sup>1)</sup>	$\nabla$	$\nabla$	O III, 50.
26 <sup>1)</sup>	$B < 90^\circ$ $c > 90^\circ$ $b < 90^\circ$	$a > 90^\circ$ $A < 90^\circ$ $C > 90^\circ$	O III, 54.
27 <sup>1)</sup>	$\nabla$	$\nabla$	O III, 51.
28 <sup>1)</sup>	$\nabla$	$\nabla$	O III, 53.

Abbildg. z. Gesch. d. math. Wiss. XXIV. 12

5. Übersicht des Textinhaltes.

In der nachfolgenden Tabelle über die Sätze in Werners *de triangulis sphaericis* ist:

- C = Copernicus, *De revolutionibus orbium coelestium*, Nürnberg 1543.
  - E = *Epytoma in Aragaestum Ptolemaei*, Venedig 1496; vgl. S. 134.
  - G = Geber filius Affla, *De astronomia libri IX*, Nürnberg 1534; vgl. S. 134.
  - M = Menelaus, *Sphaerica*, Oxford 1758; vgl. S. 134 - 135.
  - N = Nassiruddin-el-Toussy, *Traité de quadrature*, Constantinople 1891.
  - O = Georgius Ioachimus Rheticus & L. Valentinus Otho, *Opus palatinum de triangulis*, Neustadt 1596. [Pars II:] *De triangulis globi.*
  - P = Ptolemaeus, *Synopsis mathematica*, Leipzig 1898 - 1903.
  - R = Ioannes de Regio Monte, *De triangulis omnimodis libri 5*, Nürnberg 1633.
  - T = Tycho Brahe, *Triangulorum planorum et sphaericorum praeis arithmetica*, Prag 1886.
  - U = Nicolaus Raymarus Ursus, *Fundamentum astronomicum*, Straßburg 1688.
- [] = wird von Werner nicht bewiesen oder nicht ausdrücklich gesagt.  
 () = implizite, d. h. nicht als Satz formuliert.

Die Verteilung der Figurenbuchstaben ist der Übersichtlichkeit wegen in der Tabelle einheitlich gemacht, so daß die Figurenbuchstaben der letzteren die des Textes nicht genau wiedergeben.

Satz	Wenn	so ist	Vgl.
58 <sup>5)</sup>	$\vee$	$\vee$	NV, III, VII, RIV, 9 inv. OIII, 116.
59	$\vee$	$\vee$	NV, III, IV, OIII, 113.
60	$\vee$	$\vee$	NV, III, IX, OIII, 117.
61	$a < 90^\circ, b = 90^\circ, c > 90^\circ$	$A < 90^\circ, B < 90^\circ, C > 90^\circ$	NV, III, VI, OIII, 115.
62	$\vee$	$\vee$	NV, III, VIII, OIII, 118.
63	$\vee$	$\vee$	NV, III, V, OIII, 114.
64	$\vee$	$\vee$	NV, III, X, OIII, 119.
65	$a = b = c = 90^\circ$	$A = B = C = 90^\circ$	NV, III, 1 & c inv. OIII, 110.
66	$\vee$	$\vee$	OIII, 105.
68	$B < 90^\circ, C > 90^\circ, b < 90^\circ$	$a < 90^\circ, A < 90^\circ, c > 90^\circ$	OIII, 105.

1) Nicht genau so formuliert, wie es die Tafel zeigt.  
 2) Mehr spezialisiert als in der Tafel.  
 3) Satz oder Beweis falsch.  
 4) Zweiteilig abgeteilt.

Satz	Wenn	so ist	Vgl.
29	$\vee$	$\vee$	MI, 22, OIII, 64.
30 <sup>5)</sup>	$\vee$	$\vee$	OIII, 62.
31 <sup>5)</sup>	$B > 90^\circ, c < 30^\circ, b > 90^\circ$	$a < 90^\circ, A < 90^\circ, C < 90^\circ$	OIII, 66.
32 <sup>5)</sup>	$\vee$	$\vee$	OIII, 63.
33	$\vee$	$\vee$	OIII, 65.
34	$\vee$	$\vee$	GI, 11 <sup>3</sup> , RIV, 33 <sup>5</sup> , OIII, 71.
35	$\vee$	$\vee$	GI, 11 <sup>3</sup> , RIV, 33 <sup>5</sup> , OIII, 74.
36	$a < 90^\circ, B < 90^\circ, C < 90^\circ$	$A < 90^\circ, b < 90^\circ, c < 90^\circ$	OIII, 77.
37	$\vee$	$\vee$	OIII, 88.
38 <sup>5)</sup>	$\vee$	$\vee$	OIII, 80.
39	$\vee$	$\vee$	GI, 11 <sup>3</sup> , RIV, 33 <sup>5</sup> , OIII, 70.
40	$a = 90^\circ, B = 90^\circ, C = 90^\circ$	$A = 90^\circ, b = 90^\circ, c = 90^\circ$	GI, 11 <sup>3</sup> , RIV, 33 <sup>5</sup> , OIII, 73.
41	$\vee$	$\vee$	OIII, 76.
42	$\vee$	$\vee$	OIII, 82.
43	$\vee$	$\vee$	GI, 11 <sup>3</sup> , RIV, 33 <sup>5</sup> , OIII, 72.
44	$a > 90^\circ, B = 90^\circ, C = 90^\circ$	$A = 90^\circ, b = 90^\circ, c = 90^\circ$	GI, 11 <sup>3</sup> , RIV, 33 <sup>5</sup> , OIII, 75.
45 <sup>5)</sup>	$\vee$	$\vee$	OIII, 78.
46 <sup>5)</sup>	$\vee$	$\vee$	OIII, 84.
47	$B = 90^\circ, C < 90^\circ, b = 90^\circ$	$a = 90^\circ, A = 90^\circ, c = 90^\circ$	GI, 11 <sup>2, 15</sup> , RIV, 5 <sup>2</sup> & 7 <sup>2</sup> , OIII, 88.
50	$\vee$	$\vee$	GI, 11 <sup>2, 15</sup> , RIV, 5 <sup>2</sup> & 7 <sup>2</sup> , OIII, 89.
48	$\vee$	$a = 90^\circ, A = 90^\circ, c = 90^\circ$	OIII, 94.
49 <sup>5)</sup>	$B < 90^\circ, C = 90^\circ, b = 90^\circ$	existieren nicht	GI, 11 <sup>3</sup> , RIV, 33 <sup>5</sup> , OIII, 93.
51 <sup>1)</sup>	$\vee$	$\vee$	GI, 11 <sup>3</sup> , RIV, 33 <sup>5</sup> , OIII, 95.
52 <sup>2)</sup>	$\vee$	$\vee$	OIII, 99.
53	$B < 90^\circ, C < 90^\circ, b = 90^\circ$	$a > 90^\circ, A > 90^\circ, c < 90^\circ$	RIV, 14, OIII, 98.
54	$\vee$	$\vee$	RIV, 14, OIII, 100.
55 <sup>2)</sup>	$\vee$	existiert nicht	RIV, 13, OIII, 108.
56	$B > 90^\circ, C > 90^\circ, b = 90^\circ$	$a > 90^\circ, A > 90^\circ, c > 90^\circ$	OIII, 107.
57	$\vee$	$\vee$	OIII, 109.

**Buch II.**

**I. Allgemeiner Teil.**

Die sphärisch-trigonometrischen Grundformeln.

Satz	sagt	Vgl.
1	Wenn $\frac{A}{\sin A} = \frac{C}{\sin C} = \frac{E}{\sin E}$ , so ist $\frac{A}{\sin A} = \frac{C}{\sin C} = \frac{E}{\sin E}$ (Hilfssatz), Wenn $\frac{A}{\sin A} = \frac{C}{\sin C} = \frac{E}{\sin E}$ , so ist $\frac{D}{\sin D} = \frac{F}{\sin F}$ und $\frac{F}{\sin F} = \frac{C}{\sin C}$ (Hilfssatz)	
2	$\sin A \sin B = \sin B \sin C$ , wenn $AB + BC = 180^\circ$ , d. h. $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$	(M)(P)(E)(B)(N), UII, 13.
3	Menelaos' Satz (Transversalsatz) in der Ebene, 2 Fälle	PI, 13, NII, EI, 9-10.
4-5	Hilfssätze zu Menelaos' Satz auf der Kugel	PI, 13, NIII, I, I, EI, 11-14.
6-7	Menelaos' Satz (Transversalsatz) auf der Kugel, 2 Fälle	MIII, I, PI, 13, NIV, II-III, EI, 15-16.
8-9	Wenn in den sphärischen Dreiecken $ABC$ und $A_1B_1C_1, A = A_1$ und $C = C_1$ , oder $C + C_1 = 180^\circ$ , so ist $\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin c_1}{\sin a_1}$	MIII, 2.
10		

Satz.	Gegeben	zu finden	durch	Vgl.
25	$a, b$	$A, B$	II, 22 & 11	NV, VII, III, 2; RIV, 25 <sup>2</sup> ; OII, V & IV, XIII—XIV; T II, U III, IV, II.
26	$A, a$	$c$	II, 11	NV, VII, III, 2; RIV, 27 <sup>1</sup> ; OI, OII, II & IV, IV—VI; 14, IV <sup>4</sup> ; T IV, U III, IV, IV.
27	$A, a$	$B$	II, 26, 20 & 18	NV, VII, III, 2; RIV, 27 <sup>1</sup> ; OI, OII, II & IV, IV—VI; 14, IV <sup>4</sup> ; T IV, U III, IV, IV.
28	$A, B$	$a, b, c$	II, 24, 26 & 17 oder 20	NV, VII, VII, 2; RIV, 26; OII, VI & IV, XV—XVI; CI, 14, V, T V, U III, IV, I.

**Buch III.**

Die Auflösung des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks durch Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke.

( $ABC$  schiefwinkliges sphärisches Dreieck mit Seiten  $a, b, c$ )

Satz.	Wenn	so findet man	durch	indem man anwendet	Vgl.
1	$e < b < 90^\circ$			II, 11 oder 17, 20 & 22	
2	$e < 90^\circ = b$			8 II, 11	
3	$A < 90^\circ$	$c < 90^\circ < b$		II, 11, 24 & 22	NV, VII, 2; RIV, 28; CI, 14, XI <sup>1</sup> ; T VI, VIII
4		$e = 90^\circ < b$		II, 22	
5		$90^\circ < e < b$	$A, b, c$	III, 1	
6		$e < b < 90^\circ$	$a$	II, 17, 20 & 22	U III, VIII
7		$c < 90^\circ = b$		II, 11	O II,
8	$A > 90^\circ$	$e < 90^\circ < b$		II, 11, 20 & 22	[cf. IV, 10—17.]
9		$e = 90^\circ < b$		II, 11	
10		$90^\circ < e < b$		III, 6	
11	$c < a < 90^\circ$			II, 11 & 20	
12	$a < c < 90^\circ$			II, 11 & 20	
13	$c < a = 90^\circ$			II, 11 & 20	
14	$A < 90^\circ$	$c < a < 90^\circ$		II, 11 & 20	
15		$a < c = 90^\circ$		II, 11 & 20	
16		$a < 90^\circ < c$	$A, a, c$	II, 11 & 20	NV, VII, II <sup>2</sup> ; RIV, 29—30; CI, 14, XI <sup>2</sup> ; U III, X—XI; O II, 3
17		$c < a < 90^\circ$		II, 23	
18	$A > 90^\circ$	$c < a = 90^\circ$		II, 17, 20 & 22	
19		$e < 90^\circ < a$		II, 20	
20		$e = 90^\circ < a$			
21		$e > 90^\circ > a$		II, 22, 11, 20 & 26	

Satz.	In dem bei $C$ rechtwinkligen sphärischen Dreieck $ABC$ mit den Seiten $a, b, c$ ist:	Vgl.
11	$\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin \alpha}{\sin A}$ d. h. Grundformel I, Ersatztheorem (regula 4 quantitatum)	(M), GI, 12—13; NV, V, 139—155; E I, 18 <sup>1</sup> ; RIV, 15—16; CI, 14, III, OI, 16, 21—23 & 39.
12	$\frac{\sin c}{\sin b} = \frac{\sin(90^\circ - a)}{\sin(90^\circ - A)}$	(M), NV, V, 161—162; E II, 33; O I, 18 & 20.
13	$\frac{\sin(90^\circ - a)}{\sin(90^\circ - c)} = \frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - A)}$ d. h. Grundformel III	(M), GI, 15; NV, V, 158—159; E I, 19, coroll. XI, 1; RIV, 19; O, I, 28.
14	$\frac{\sin(90^\circ - a)}{\sin(90^\circ - A)} = \frac{\sin \alpha}{\sin B}$ d. h. Grundformel V	(M), GI, 14; NV, V, 159—160; RIV, 18 & V, 14; O I, 24—25.
15	Wenn $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ , so ist $\frac{B \cdot C}{A} = D$ (Hilfssatz)	R I, 19.
16	Wenn $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$ , so ist $\frac{B^2}{A} = C$ (Hilfssatz)	

Es fehlen also die Grundformeln II, IV, VI des rechtwinkligen Dreiecks und alle Grundformeln des schiefwinkligen, darunter der Sinussatz (NV, V, p. 155—158; RIV, 7). Der Cosinussatz folgt in Buch IV.

**2. Spezieller Teil.**

Die Auflösung des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks.

( $ABC$  rechtwinkliges [ $C = 90^\circ$ ] sphärisches Dreieck mit Seiten  $a, b, c$ )

Satz.	Gegeben	zu finden	durch	Vgl.
17 <sup>1)</sup>	$A, c$	$a$	II, 11	NV, VII, IV, 2; RIV, 27 <sup>2</sup> ; OII, I & IV, I—III; CI, 14, IV <sup>7</sup> ; T IV, U III, IV, V.
18	$a, c$	$A$	II, 11	NV, VII, IV, 2; RIV, 25 <sup>2</sup> ; OII, IV & IV, X—XII; T II, U III, IV, III.
19 <sup>1)</sup>	$A, b$	$B$	II, 17	NV, VII, 3; RIV, 27 <sup>3</sup> ; OI, OII, III & IV, VII—IX; 14, IV <sup>1</sup> ; T III, U III, IV, VI.
20	$a, c$	$b$	II, 15	NV, VII, IV, 2; RIV, 25 <sup>1</sup> ; OII, IV & IV, X—XII; [T I] U III, IV, III.
21	$a, c$	$B$	II, 20 & 18	NV, VII, IV, 2; RIV, 25 <sup>2</sup> ; OII, IV & IV, X—XII; T II, U III, IV, III.
22	$a, b$	$c$	II, 11	NV, VII, IV, 2; RIV, 25 <sup>1</sup> ; OII, V & IV, XIII—XIV; T I, U III, IV, II.
23 <sup>1)</sup>	$A, b$	$c$	II, 14 & 11	NV, VII, 3; RIV, 27 <sup>3</sup> ; OI, OII, III & IV, VII—IX; 14, IV <sup>2</sup> ; T III—V, U III, IV, VI.
24	$A, a$	$b$	II, 11 & 20	NV, VII, III, 2; RIV, 27 <sup>1</sup> ; OI, OII, II & IV, IV—VI; 14, IV <sup>5</sup> ; T IV, U III, IV, IV.

1) Es fehlen also drei Fälle: Gegeben  $A, c$ ; zu finden  $B, b$  (NV, VII, IV, 2; RIV, 27<sup>2</sup>; CI, 14, IV, 9; T IV, U III, IV, V; OII, I & IV, I—III); Gegeben  $A, b$ ; zu finden  $a$  (NV, VII, VI, 2; RIV, 27<sup>3</sup>; CI, 14, IV, 3; T III—V; U III, IV, VI; OII, III & IV, VII—IX).

Satz.	Wenn	so findet man	indem man anwendet	Vgl.
54	$A < 90^\circ$	$C < 90^\circ$	$a = 90^\circ$	II, 17, 21, 27, 20 & 25 II, 27
55	$A < 90^\circ$	$C < 90^\circ$	$a > 90^\circ$	II, 17 & 27
56	$A < 90^\circ$	$C > 90^\circ$	$a = 90^\circ$	III, 54
57	$A < 90^\circ$	$C > 90^\circ$	$a > 90^\circ$	III, 55
58	$A > 90^\circ$	$C < 90^\circ$	$a = 90^\circ$	III, 56
59	$A > 90^\circ$	$C < 90^\circ$	$a > 90^\circ$	III, 56
60	$A > 90^\circ$	$C > 90^\circ$	$a = 90^\circ$	III, 55
61	$A > 90^\circ$	$C > 90^\circ$	$a > 90^\circ$	III, 54
62	Es fehlen also: $B, C$ durch $A, a, c$ (NV, VII, RIV, 29-30, CI, 14, XI <sup>2</sup> , UIII, X-XI, OII <sub>2</sub> ) und $a, b, c$ durch $A, B, C$ (NV, VII, VI <sup>2</sup> , RIV, 33, CI, 14, XV, UIII, XIII, OV <sub>2</sub> ). $B, C, A, C$ durch $a, b, c$ folgt in Buch IV.			

**Buch IV.**

Die Auflösung des schiefwinkigen sphärischen Dreiecks durch den prosthaphäretisch umgebilldeten Cosinussatz.

( $ABC$  schiefwinkiges sphärisches Dreieck mit Seiten  $a, b, c$ )

Satz.	Wenn	so findet man	indem man anwendet	Vgl.
1	Hilfssatz: $C$ und $\sin(90^\circ - b)$ auf die $c$ -Ebene zu projizieren			
2	$c < a < 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$[d.h. b = 90^\circ]$	$\frac{1}{2} \frac{\sin(90^\circ - a + c) + \sin(90^\circ - c - a)}{\sin(90^\circ - b) - \sin(90^\circ - c - a)}$ $= \frac{\sin \text{ tot}}{\sin \text{ tot}}$ $= \sin \text{ evrs}(180^\circ - B)$
3	$c = a$	$b < 90^\circ$	$[d.h. b = 90^\circ]$	IV, 2, 4, 5, je nachdem $90^\circ - a = 90^\circ - c \Rightarrow 45^\circ$ oder II, 11
4	$[c <] a = 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$[d.h. b < 90^\circ]$	$\frac{1}{2} \frac{\sin 2c}{\sin(90^\circ - b) - \sin \text{ evrs}(180^\circ - B)}$ $\frac{1}{2} \frac{\sin(90^\circ - a + c) + \sin(a - (90^\circ - c))}{\sin(90^\circ - b) + \sin(a - (90^\circ - c))}$ $= \frac{\sin \text{ tot}}{\sin \text{ tot}}$
5 <sup>1</sup>	$90^\circ - c < a < 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$[c]$	NV, VII, V RIV, 34 & 2-4 CI, 14, XII T IX U III, VII III, IV, Postul. O IV <sub>2</sub> .
5 <sup>2</sup>	$90^\circ - c < a < 90^\circ$	$b = 90^\circ$	$[c]$	$\frac{1}{2} \frac{\sin(90^\circ - a + c) + \sin(a - (90^\circ - c))}{\sin(a - (90^\circ - c))}$ $= \frac{\sin \text{ tot}}{\sin \text{ tot}}$
5 <sup>3</sup>	$90^\circ - c < a < 90^\circ$	$b > 90^\circ$	$[c]$	$\frac{1}{2} \frac{\sin(90^\circ - a + c) + \sin(a - (90^\circ - c))}{\sin(a - (90^\circ - c)) - \sin(b - 90^\circ)}$ $= \frac{\sin \text{ tot}}{\sin \text{ tot}}$
6	$c < 90^\circ$	$a = 90^\circ$	$b < 90^\circ$	II, 26
7	$c < 90^\circ$	$a > 90^\circ$	$b < 90^\circ$	IV, 2-5
8	$c = 90^\circ$	$a > 90^\circ$	$b < 90^\circ$	IV, 6
9	$c > 90^\circ$	$a > 90^\circ$	$b < 90^\circ$	IV, 3-5

Satz.	Wenn	so findet man	indem man anwendet	Vgl.
22	$c < b < 90^\circ$		II, 17, 20, 22, 18 & 25	
23	$c < 90^\circ = b$		II, 25	
24	$A < 90^\circ$	$c < 90^\circ < b$	II, 17, 20, 18 & 25	NV, VII, I <sup>2</sup> , RIV, 28, CI, 14, XI, U III, VIII, O II <sub>2</sub> .
25	$c = 90^\circ < b$		II, 25	
26	$90^\circ < c < b$		II, 17, 20 & 25	
27	$c < b < 90^\circ$	$B, C$	II, 17, 20, 25 & 18	
28	$c < 90^\circ = b$	$A, b, c$	III, 23	
29	$c < 90^\circ < b$		III, 22	
30	$c = 90^\circ < b$		III, 23	
31	$90^\circ < c < b$		III, 24	
32	$A < 90^\circ$	$c < 90^\circ$	II, 17, 20, 18 & 25	
33	$c < 90^\circ < b$		II, 23 & 17	NV, VII, III <sup>2</sup> , RIV, 31, CI, 14, XII, U III, XIII O III <sub>2</sub> .
34	$c < 90^\circ = b$		II, 17, 21, 23 & 20	
35	$c < 90^\circ < b$	$a, c$	III, 32	
36	$A > 90^\circ$	$c < 90^\circ < b$	III, 33	
37	$90^\circ < c < b$		III, 34	
38	$A < 90^\circ$	$c < 90^\circ$	II, 17, 26 & 20	
39	$c < 90^\circ < b$		II, 26 & 20	
40	$c = 90^\circ < b$		II, 17, 26 & 20	
41	$A > 90^\circ$	$c < 90^\circ < b$	II, 26 & 20	NV, VII, IV <sup>2</sup> , RIV, 32, CI, 14, XII <sup>2</sup> , U III, XIII, T VIII, O III <sub>2</sub> .
42	$A > 90^\circ$	$c > 90^\circ$	II, 26 & 20, III, 38	
43	$A < 90^\circ$	$c > 90^\circ$	III, 38	
44	$A < 90^\circ$	$c > 90^\circ$	III, 39	
45	$c < 90^\circ < b$	$B, C$	III, 40	
46	$c < 90^\circ < b$	$A, a, C$	III, 41	
47	$90^\circ < c < b$		III, 42	
48	$A < 90^\circ$	$c < 90^\circ$	II, 17, 20, 18 & 19	
49	$c < 90^\circ < b$		II, 11	NV, VII, III <sup>2</sup> , RIV, 31, CI, 14, XII, T VII, U III, XIII O III <sub>2</sub> .
50	$A < 90^\circ$	$c < 90^\circ$	II, 17, 21 & 19	
51	$c < 90^\circ < b$	$B$	III, 50	
52	$A < 90^\circ$	$c > 90^\circ$	III, 49	
53	$A < 90^\circ$	$c > 90^\circ$	III, 48	

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR · HEFT XXIV. 2

**IOANNIS VERNERI**  
**DE TRIANGULIS SPHAERICIS**  
 LIBRI QUATUOR  
**DE METEOROSCOPIIS**  
 LIBRI SEX  
 CUM PROEPIO  
**GEORGH IOACHIMI RHETICI**

II  
**DE METEOROSCOPIIS**  
 HERAUSGEBEN VON  
**JOSEPH WÜRSCHMIDT**  
 UNTER BENUTZUNG DER VORARBEITEN VON  
 Dr. A. BÜRNBO

MIT EINEM VORWORT VON EILHARD WIEDEMANN  
 UND 97 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN  
 DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER  
 1913

Satz.	Wenn	so findet man	durch	indem man anwendet	Vgl.
10	$c < a < 90^\circ - c$ [d. h. $b < 90^\circ$ ]			$\frac{\sin tot}{\sin vers(180^\circ - B)} = \frac{1}{2} \frac{\sin(90^\circ - a + c) - \sin(90^\circ - c - a)}{\sin(90^\circ - b) - \sin(90^\circ - c - a)}$	NV, VII, I <sup>a</sup> , RIV, 28, CL, 14, XI, TVL
11	$c = a$		IV, 10, 12, 13 je nachdem	$90^\circ - a = 90^\circ - c \leq 45^\circ$ oder II, 17	U III, VIII & III, IV, Postal, O II <sub>2</sub>
12	$c < a = 90^\circ - c$			$\frac{\sin tot}{\sin vers(180^\circ - B)} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2c}{\sin(90^\circ - b)}$	NV, VII, I <sup>a</sup> , RIV, 28, CL, 14, XI, TVL
13 <sup>1</sup>	$[b < 90^\circ]$	$b$	$a, B, c$	$\frac{\sin tot}{\sin vers(180^\circ - B)} = \frac{1}{2} \frac{\sin(90^\circ - a + c) + \sin(a - (90^\circ - c))}{\sin(90^\circ - b) + \sin(a - (90^\circ - c))}$	U III, VIII & III, IV, Postal, O II <sub>2</sub>
13 <sup>2</sup>	$[b = 90^\circ]$			$b = 90^\circ$	
13 <sup>3</sup>	$[b > 90^\circ]$			$\frac{\sin tot}{\sin vers(180^\circ - B)} = \frac{1}{2} \frac{\sin(90^\circ - a + c) + \sin(a - (90^\circ - c))}{\sin(a - (90^\circ - c)) - \sin(b - 90^\circ)}$	[cf. III, 1—10.]
14	$c < 90^\circ, a = 90^\circ$		II, 17		
15	$c < 90^\circ, a > 90^\circ$		IV, 10—13		
16	$c = 90^\circ, a > 90^\circ$	$B > 90^\circ$	IV, 14		
17	$c > 90^\circ, a > 90^\circ$		IV, 10—13		

1) Während IV, 2, 10, 12, 13 so abgefaßt sind, daß IV, 3 & II jedenfalls formaliter nie als Spezialfälle derselben angefaßt werden können, so kann IV, 3, je nachdem  $a = c \leq 45^\circ$  ist, als Spezialfall von IV, 4—5 betrachtet werden, obwohl diese Corollarien deutlich zeigen, daß nur mit der Möglichkeit  $c < a$  gerechnet wird, und die Möglichkeit  $a = c$  in den Beweisen nicht berücksichtigt wird.

In IV, 11 soll es wie in IV, 3 heißen:  $90^\circ - a = 90^\circ - c \leq 45^\circ$ . Der Text zeigt, daß Werner selbst diesen Fehler begangen hat, weshalb er nicht korrigiert werden konnte.

Druckfehlerberichtigung.

Seite	Zeile	steht:	soll heißen:
16	3	inequales	inequales
25	13	segmentum, bifarium	segmentum bifarium
83	25	$AB$ et $BC$	$AB$ et $AC$
121	15—16	oportuit, ostendere	oportuit ostendere.

