

# Anwendung der Logarithmen in der Geodäsie

Ein kurzer Überblick mit Beispielen

Rainer Heer

## 1. Einleitung und Grundlagen

### 1.1 Geschichte der Geodäsie

Das Wort Geodäsie stammt aus dem Griechischen und kann im weitesten Sinne mit dem Begriff Erdteilung übersetzt werden. In diesem Verständnis ist darunter der gesamte Bereich des Vermessungswesens zu verstehen.

Die Ursprünge gehen weit bis vor Christi Geburt zurück und bestanden in der damaligen Notwendigkeit (z. B. Nilüberschwemmungen im alten Ägypten, ca. 1700 v. Chr.), Landflächen neu zu erfassen bzw. aufzuteilen, Grund- und Eigentumsgrenzen zu definieren und Landesgrenzen zu dokumentieren.

In diesem Zusammenhang war es auch zweifellos notwendig, zur Errichtung von größeren Gebäuden (z. B. Pyramiden) ebenfalls Vermessungen durchzuführen.

Darüber hinaus ergab sich im Rahmen der Beschäftigung mit den Gestirnen das Interesse zur Bestimmung der Erdfigur bzw. Erdgestalt. Als Beispiel sei hier die Bestimmung des Erdumfangs durch den griechischen Gelehrten Eratosthenes um ca. 250 v. Chr. genannt, auf die an anderer Stelle noch näher eingegangen wird.

Nach diesen Beispielen zu den Anfängen kann nach der klassischen Definition von Friedrich Robert Helmert (1843 – 1917), die Geodäsie als die Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche betrachtet werden.

Er teilte die Geodäsie in folgende Bereiche ein:

- Höhere Geodäsie,  
auch physikalische, mathematische, astronomische und theoretische Geodäsie, wie z. B. Erdmessung, Landesvermessung und Astronomie und
- Niedere Geodäsie,  
auch allgemeine, angewandte und praktische Geodäsie, genannt.

Daraus ergeben sich die grundlegenden Aufgaben der Geodäsie:

- Erdmessung
  - Bestimmung und Darstellung der Erdfigur mit äußerem Erdschwerefeld
  - Schaffung gültiger Bezugssysteme für Lage, Höhe und Schwere
  - Bereitstellung geometrischer und physikalischer Erdmodellparameter
- Landesvermessung
  - Erstellung eines Lage-, Höhen- und Schwerefestpunktfeldes auf Grundlage der Erdmessung
  - Herstellung und Laufendhaltung von Kartenwerken.

- Detailvermessung
  - Verdichtung der Festpunktfelder zur Aufmessung lokaler Phänomene
  - Kataster- und Liegenschaftsvermessung
    - Gebäudevermessung
    - Vermessung der Eigentums- und Landnutzungsgrenzen
    - Bereitstellung von Liegenschaftskarten
  - Topographische oder photogrammetrische Vermessungen
    - Erfassung des Geländereiefs für die kartographische Darstellung
  - Ingenieurvermessung
    - Absteckung, Errichtung, Überwachung von Bauwerken und Maschinen.

Damit lässt sich dann die endgültige Definition wie folgt angeben:

Als Vermessungskunde oder Geodäsie bezeichnet man die Lehre von der Ausmessung größerer oder kleinerer Teile der Erdoberfläche und ihre Darstellung in Verzeichnissen, Karten und Plänen [5].

## **1.2 Bezugsflächen**

Da die Figur der Erde mit ihrer Oberfläche so unregelmäßig ist, dass eine geschlossenen mathematische Beschreibung unmöglich erscheint, muss eine geometrische Grundform gefunden werden, die dagegen mathematisch beschreibbar ist und auf die sich lokale Gegebenheiten beziehen lassen.

Eine Bezugsfläche bzw. Referenzfläche ist eine mathematisch, physikalisch oder mittels vorhandener Festpunktfelder definierte Fläche, auf die sich Lagekoordinaten, Höhen oder Schwerepotentiale von Punkten beziehen [5].

Als Ersatzfläche für relativ kleine Messgebiete kann die Erde bzw. ein Teil der Erde als eine Ebene angesehen werden. Seit der Feststellung, dass die Erde eine Kugel ist, wird immer versucht, diese Figur näher zu beschreiben. Die Rotation der Erde führt an den Polen zu einer Abplattung, so dass sich die Erdgestalt durch ein Rotationsellipsoid mit kleiner und großer Halbachse beschreiben lässt.

Das Bezugsellipsoid (Referenzellipsoid) ist eine mathematisch-geometrische Ersatzfläche für die Erde, die durch die Rotation einer Ellipse um ihre Achse entsteht und durch die Angabe der großen und kleinen Halbachse eindeutig definiert werden kann [5].

Dabei unterscheidet man zum einen ein mittleres Erdellipsoid, bei dem die Rotationsachse mit der Erdachse identisch ist und die Erdfigur als Ganzes ersetzt und zum anderen ein Rotationsellipsoid, bei dem die Ellipsoidparameter so gewählt sind, dass sie sich bestmöglich einem gegebenen Gebiet anpassen.

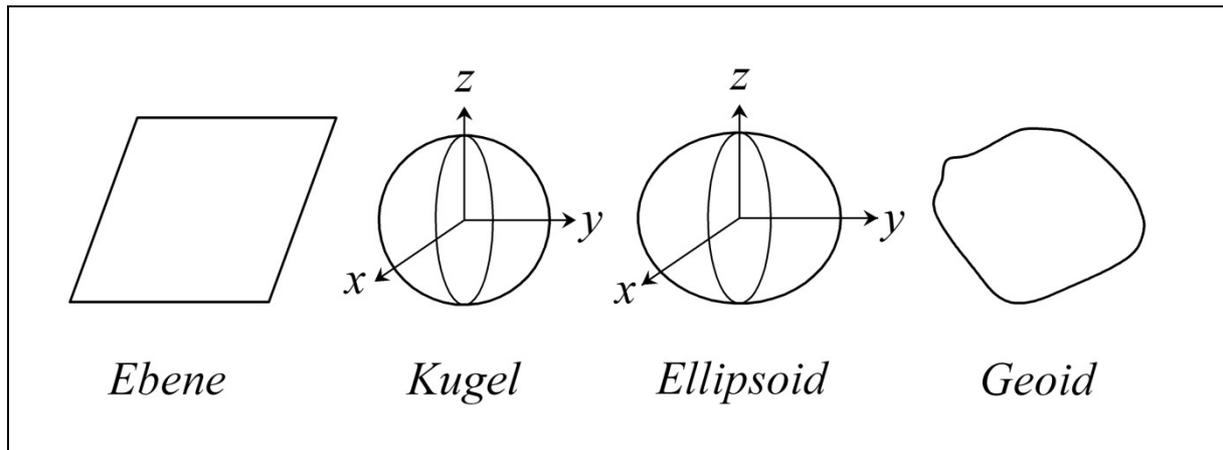
Im Gegensatz zu dieser rein geometrisch festgelegten Erdfigur begründet sich die Geodäsie auch auf physikalische Annahmen, die ein Abgehen von der idealen Erdfigur erforderte. Wegen der ungleichmäßigen Massenverteilung im Erdinnern kann die Erdfigur auch durch eine Äquipotentialfläche des Erdschwerefeldes definiert werden.

Die Schwerkraft ist die aus der Gravitation der Erde bzw. der übrigen Himmelskörper sowie der Zentrifugalkraft der Erde resultierende Kraft [5].

Die weiteren Betrachtungen führten dann zum Geoid als Niveaulfläche.

Das Geoid ist eine Niveaulfläche des von verschiedenen Einflüssen (z. B. Erdgezeiten, Luftdruckschwankungen) befreiten Erdschwerefeldes in Höhe des mittleren Meeresniveaus [5].

Die Abbildung 1 zeigt die verschiedenen geodätischen Bezugsflächen.



*Bedeutungen:*

$x, y, z =$  *Koordinatenachsen*

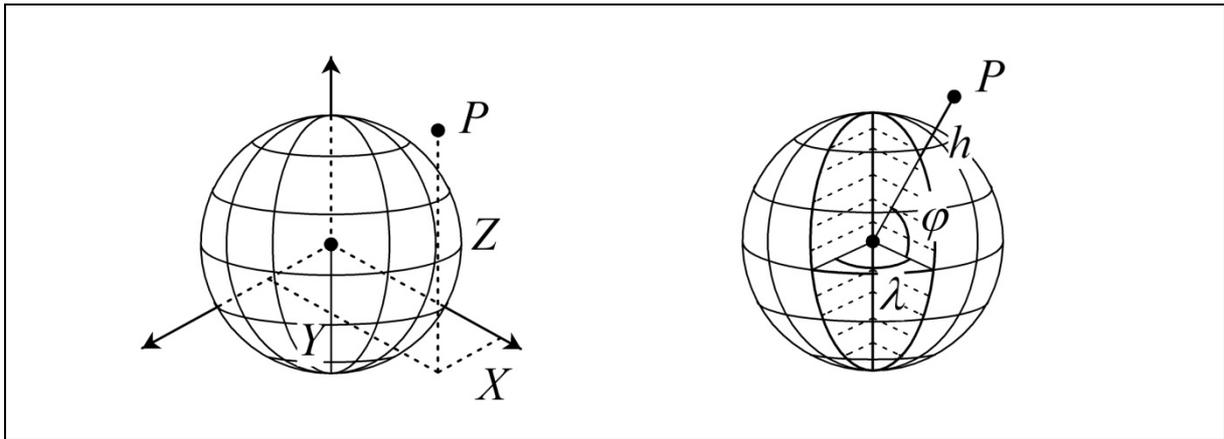
**Abb. 1:** Geodätische Bezugsflächen

### **1.3 Geodätische Koordinatensysteme**

Je nach Aufgabenstellung wird i.d.R. ein Messobjekt im allgemeinen durch einzelne charakteristische Punkte idealisiert, die für seine geometrische Beschreibung als besonders geeignet erscheinen und damit als repräsentativ gelten können. Diese Punkte müssen aber dann zusätzlich in ihrer relativen Lage zueinander festgelegt sein. Dazu lassen sich ein-, zwei- oder dreidimensionale Koordinatensysteme definieren.

Ein Koordinatensystem ist ein aus Koordinatenachsen (bzw. - Richtungen) bestehendes geometrisches System, das eine eindeutige Zuordnung der einzelnen Punkte erlaubt [5].

Dabei unterscheidet man Koordinatensysteme auf der Kugel oder dem Rotationsellipsoid und Koordinatensystemen in der Ebene (Abbildungen 2, 3 und 4).



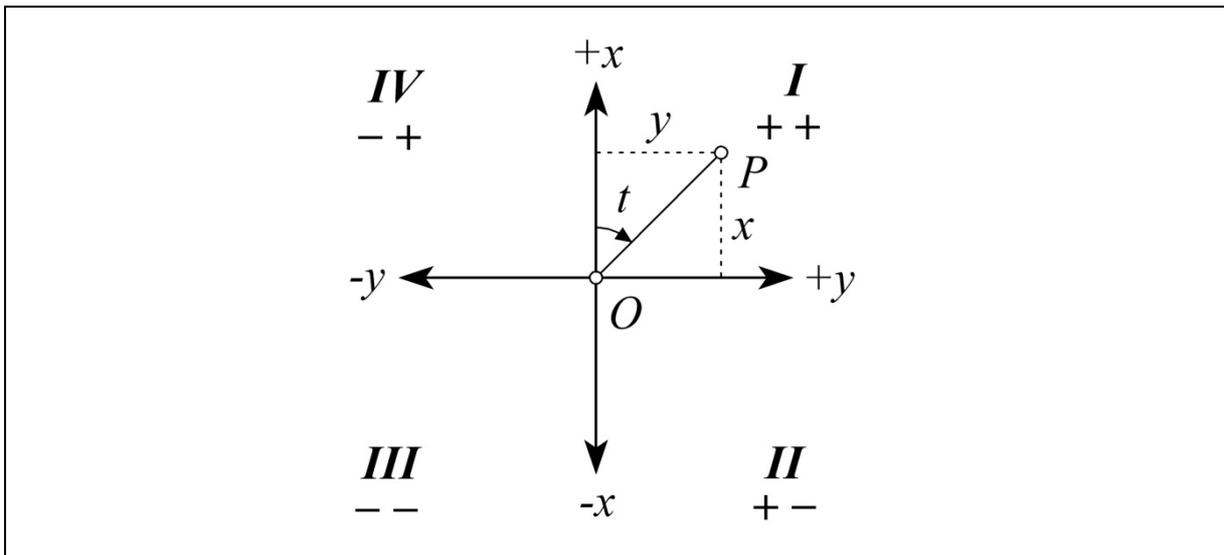
*Bedeutungen:*

$P$  = Punkt

$X, Y, Z$  = dreidimensionale kartesische Koordinaten

$\varphi, \lambda, h$  = dreidimensionale ellipsoidische Koordinaten (Breite, Länge, Höhe)

**Abb. 2:** Dreidimensionale geodätische Koordinatensysteme



*Bedeutungen:*

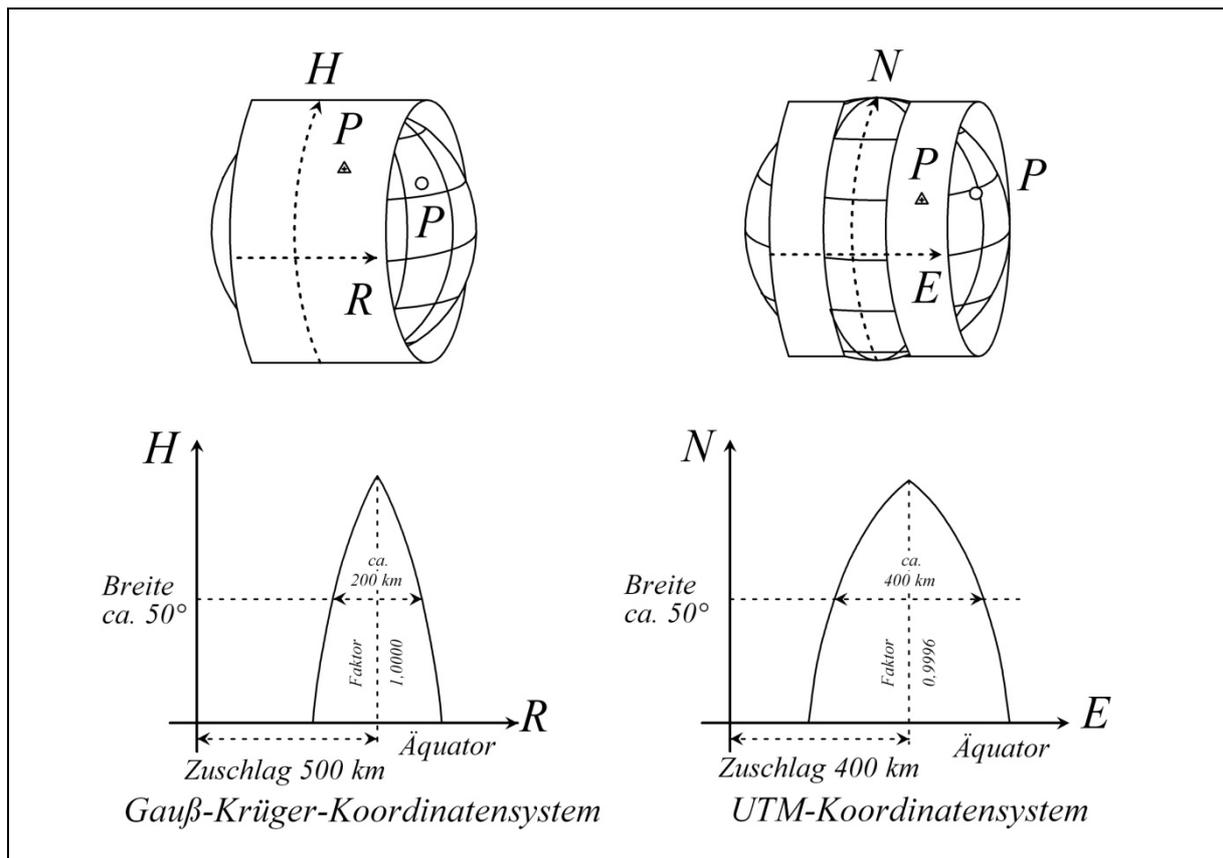
$P$  = Punkt

$y, x$  = rechtwinklige Koordinaten

$t$  = Richtungswinkel oder Azimut

$I, II, III, IV$  = Quadranten

**Abb. 3:** Einfaches, rechtwinkliges, ebenes Koordinatensystem



*Bedeutungen:*

*P = Punkt*

*H, R = Hochwert, Rechtswert*

*N, E = North, East*

**Abb. 4:** Gauß-Krüger und UTM-Koordinatensystem

Beim Durchführen von Vermessungsarbeiten müssen die Koordinatensysteme in Bezug zum Messobjekt eindeutig festgelegt sein. Dazu gehören der Koordinatenursprung, die Orientierung und der Massstab eines Koordinatensystems.

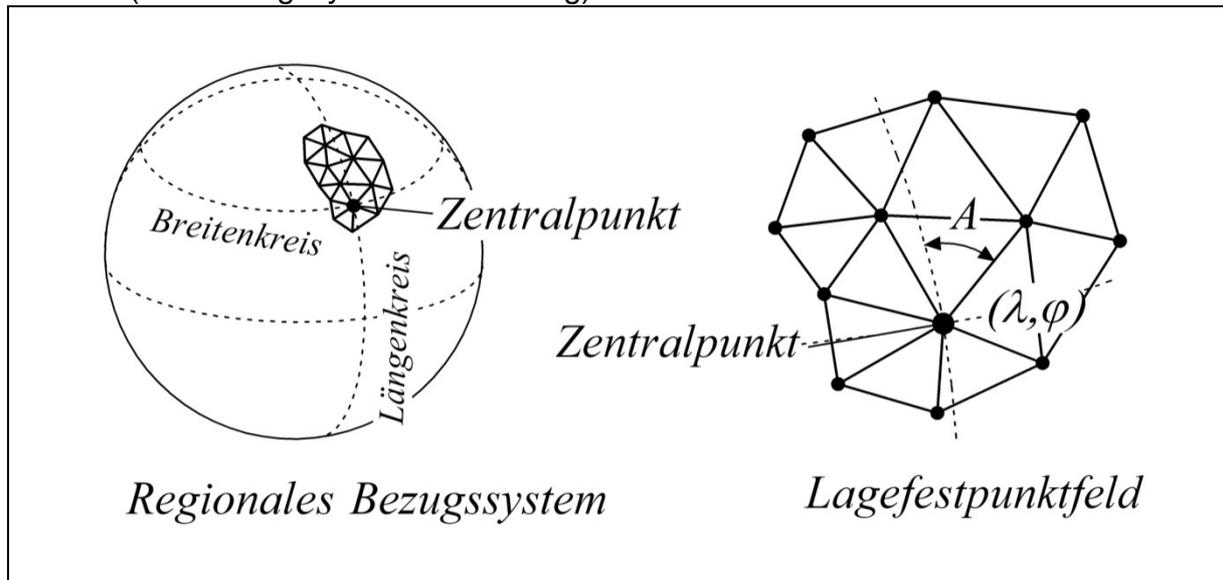
Den zugehörigen Parametersatz bezeichnet man auch als Bezugssystem oder Referenzsystem.

Als ein geodätisches Bezugssystem wird eine einheitliche objektbezogene Festlegung und Orientierung des Koordinatensystems für Zwecke einer Objektvermessung bezeichnet.

Dabei unterscheidet man lokale und globale Bezugssysteme. Im Rahmen von einfachen geodätischen Aufnahmen entstehen häufig lokale Koordinatensysteme, die sowohl polar als auch rechtwinklig definiert sein können.

Im Rahmen der technischen Möglichkeiten des 19. und 20. Jahrhunderts wurde für die Festlegung des Bezugssystems für Lagevermessungen i.d.R. die Zentralpunkt-methode gewählt, siehe Abbildung 5.1. Ausgehend von einem Zentralpunkt, dessen astronomische Breite, Länge und Azimut mit hoher Genauigkeit durch astronomische Verfahren bestimmt wurde, schuf die Landesvermessung ein das entsprechende

Gebiet überspannendes Netz von Lagefestpunkten, die dann den Bezugsrahmen bildeten (z.B. Bezugssystem Rauenberg).



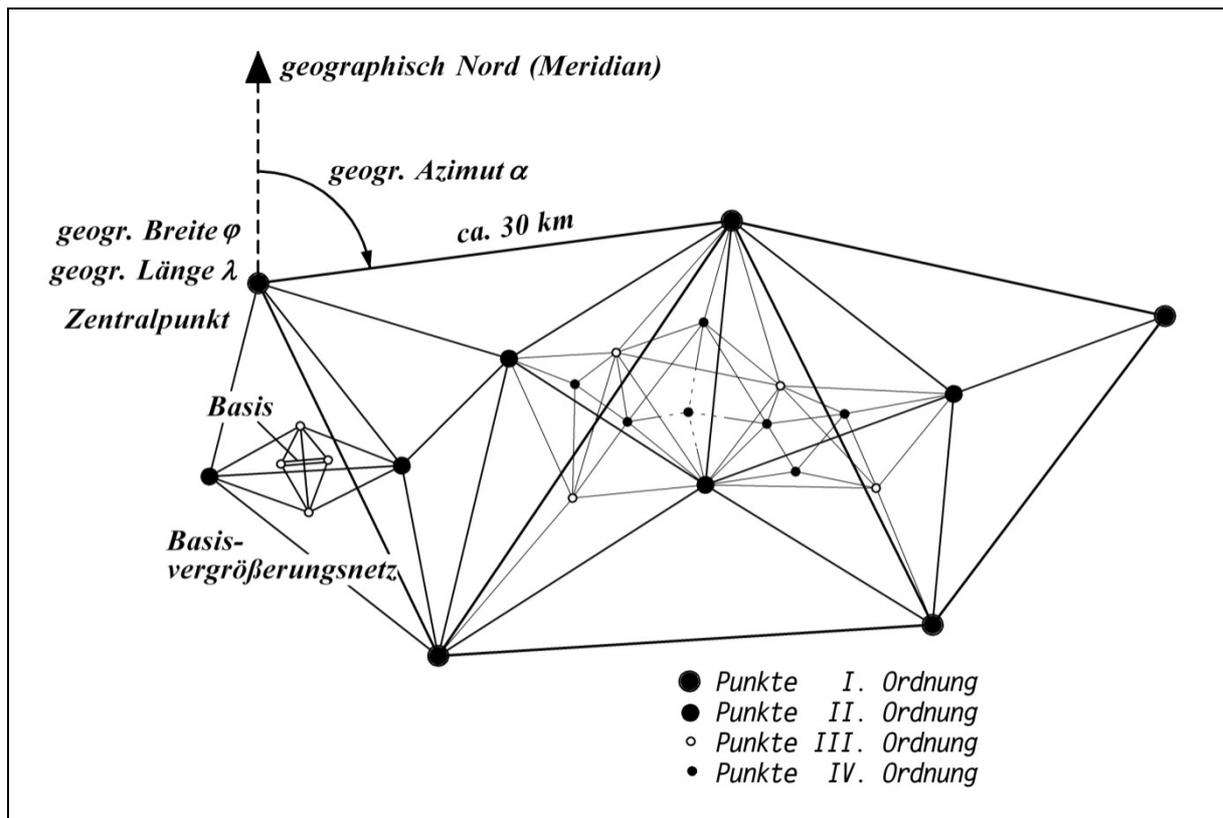
*Bedeutungen:*

$A$  = astronomisches Azimut

$\varphi, \lambda$  = Breite, Länge

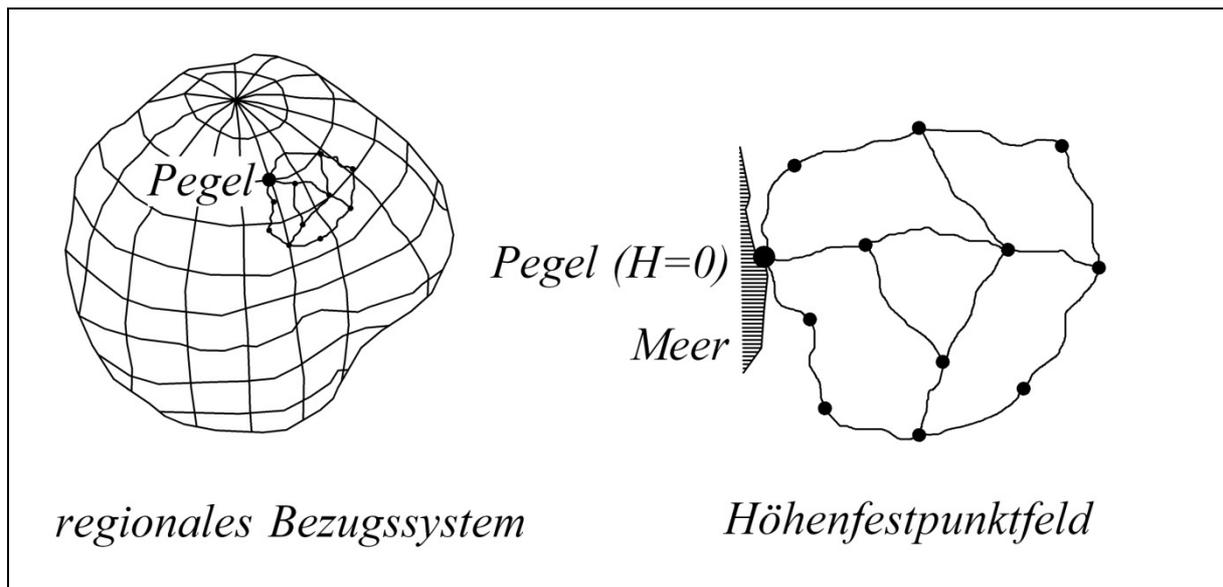
**Abb. 5.1:** Zentralpunktmethodemethoden

In der Praxis wurde das Lagefestpunktfeld nach Orientierung im Zentralpunkt nach geographisch Nord (Meridian) und einer Massstabsfestlegung durch eine Basismessung mit Basisvergrößerungsnetz in vier Verdichtungsstufen als trigonometrisches Netz angelegt. Die Punkte 1. Ordnung hatten einen Punktabstand von etwa 30 km, die Punkte der 2. Ordnung etwa 10 km. Die Punkte der 3. und 4. Ordnung bildeten die letzte Verdichtungsstufe, so dass etwa auf  $5 \text{ km}^2$  ein trigonometrischer Punkt (TP) vorhanden sein sollte, siehe Abbildung 5.2.



**Abb. 5.2:** Lagefestpunktfeld der Landesvermessung

Damit ist ein konventionelles regionales Lagebezugssystem definiert. Im Gegensatz zu dieser rein geometrischen Festlegung der Lage beziehen sich die geodätischen Höhenmessungen unter Berücksichtigung physikalischer Annahmen auf das Geoid, das in Höhe des mittleren Meeresspiegels einer Äquipotentialfläche entspricht. Ein über längere Zeit gemittelter Pegelstand wird dann als Ausgangshöhe angenommen. I.d.R. wird dieser Höhenwert zu Null definiert. Von diesem Punkt aus werden dann die Höhennetze durch Nivellement geschaffen (z. B. Amsterdamer Pegel), siehe hierzu Abbildung 6.



*Bedeutungen:*  
*H = Meereshöhe*

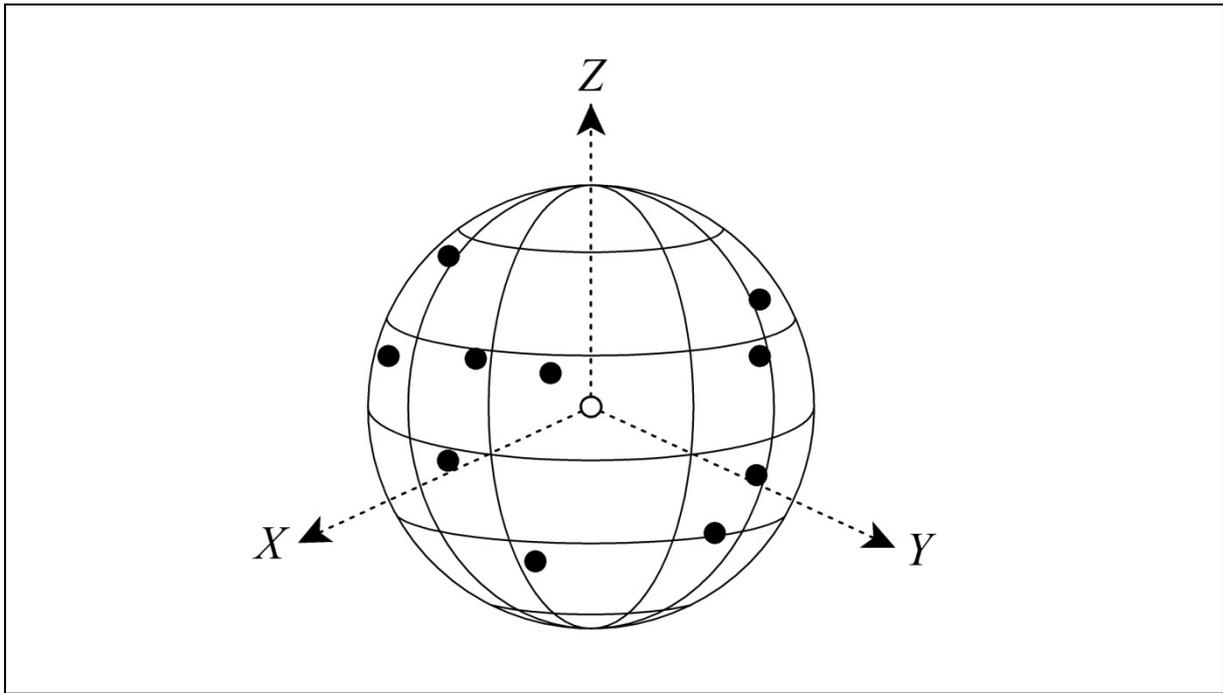
**Abb. 6:** Vertikales Bezugssystem

Sowohl beim Lage- als auch beim Höhenfestpunktfeld wurde über entsprechende Verdichtungsstufen nach dem Prinzip „vom Großen ins Kleine“ gearbeitet.

Abgelöst wurde diese konventionelle Methode unter Nutzung satellitengeodätischer Messmethoden durch die Definition eines globalen, erdfesten Bezugssystems, welches geozentrisch gelagert und dreidimensional kartesisch ist, siehe Abbildung 7.

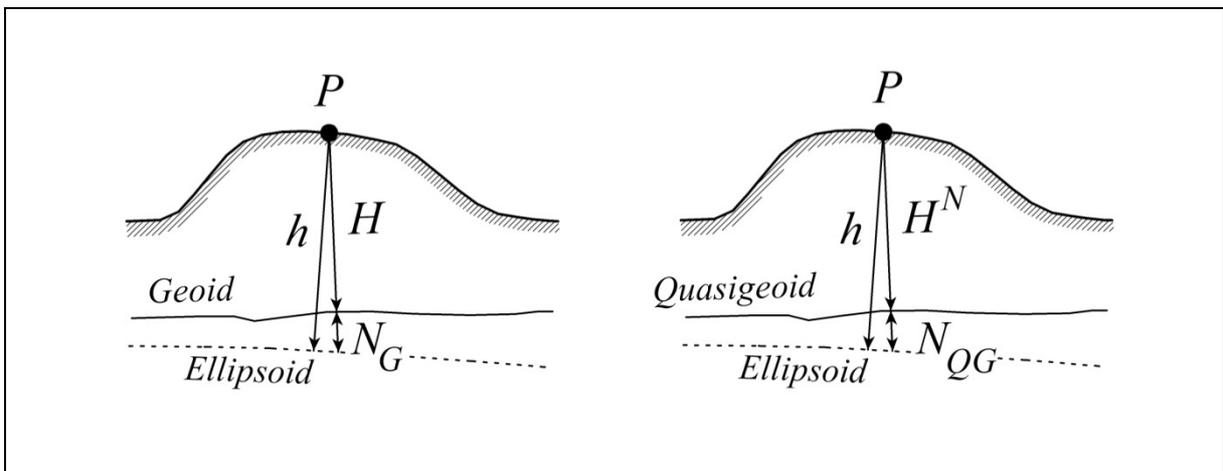
- Koordinatenursprung (Massenmittelpunkt der Erde)
- Z-Achse (mittlere Drehachse der Erde)
- XZ-Ebene (definiert durch die Z-Achse und einem ausgesuchten Punkt auf der Erde, z. B. Sternwarte von Greenwich)
- Y-Achse (Drehung der X-Achse um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn).

Mit Hilfe von Geoidmodellen kann dann der Unterschied zwischen der Höhenreferenzfläche (Äquipotentialfläche) und der ellipsoidischen Höhe angegeben werden. Abschließend ist damit ein vollständiges 3-D-Erdmodell definiert.



Bedeutungen:  
 $X, Y, Z$  = Koordinatenachsen

**Abb. 7:** Globales Bezugssystem



Bedeutungen:  
 $P$  = Punkt  
 $h$  = ellipsoidische Höhe  
 $N$  = Geoidundulation oder Geoidhöhe  
 $G$  = Geoid  
 $QG$  = Qasigeoid

**Abb. 8:** Ellipsoidische und Gebrauchshöhen

Damit sind die entscheidenden Grundlagen gelegt. Sie dienen dem Verständnis zur Erläuterung der Anwendung der Logarithmen in der Geodäsie für z. B. lokale und regionale Berechnungen unter Berücksichtigung konventioneller Methoden des 19. Jahrhunderts.

## 2. Logarithmische Berechnungen in der niederen Geodäsie

### 2.1 Koordinatenrechnungen und Azimutrechnungen

Bei der Anwendung von Logarithmen in der Geodäsie ist anzumerken, dass diese in erster Linie die Berechnung insbesondere von häufig wiederkehrenden Rechenaufgaben vereinfachen und beschleunigen sollten. Dabei geschieht dies in den meisten Fällen durch die Vereinfachung von Multiplikations- bzw. Divisionsaufgaben durch Addition bzw. Subtraktion in der logarithmischen Rechnung.

Im ersten Abschnitt der Grundlagen bzw. Geschichte der Geodäsie wurde in Abb. 3 das einfache, rechtwinklige Koordinatensystem dargestellt. In diesem ist die Lage eines Punktes durch seine rechtwinkligen Koordinaten bestimmt. Durch Hinzufügen der algebraischen Vorzeichen + und – ist die Lage im jeweiligen Quadranten (I, II, III, IV) bzw. auch auf den Koordinatenachsen eindeutig.

Die Richtung eines vom Koordinatenursprung  $O$  ausgehenden Strahls zum Punkt  $P$  (siehe Abb. 3) ist bestimmt durch den Winkel  $t$ . Er gibt die Drehung der  $+x$ -Achse von  $+x$  über  $+y$  zum Strahl  $OP$  an. Dieser Winkel wird auch Richtungswinkel genannt. Vielfach wird er auch als ebenes Azimut bezeichnet, wenn keine Verwechslung mit dem Azimut der Erdmessung und Astronomie zu befürchten ist. Er liegt damit zwischen den Grenzen  $0^\circ$  und  $350^\circ$  (Altgrad) bzw.  $0gon$  und  $400gon$  (Neugrad).

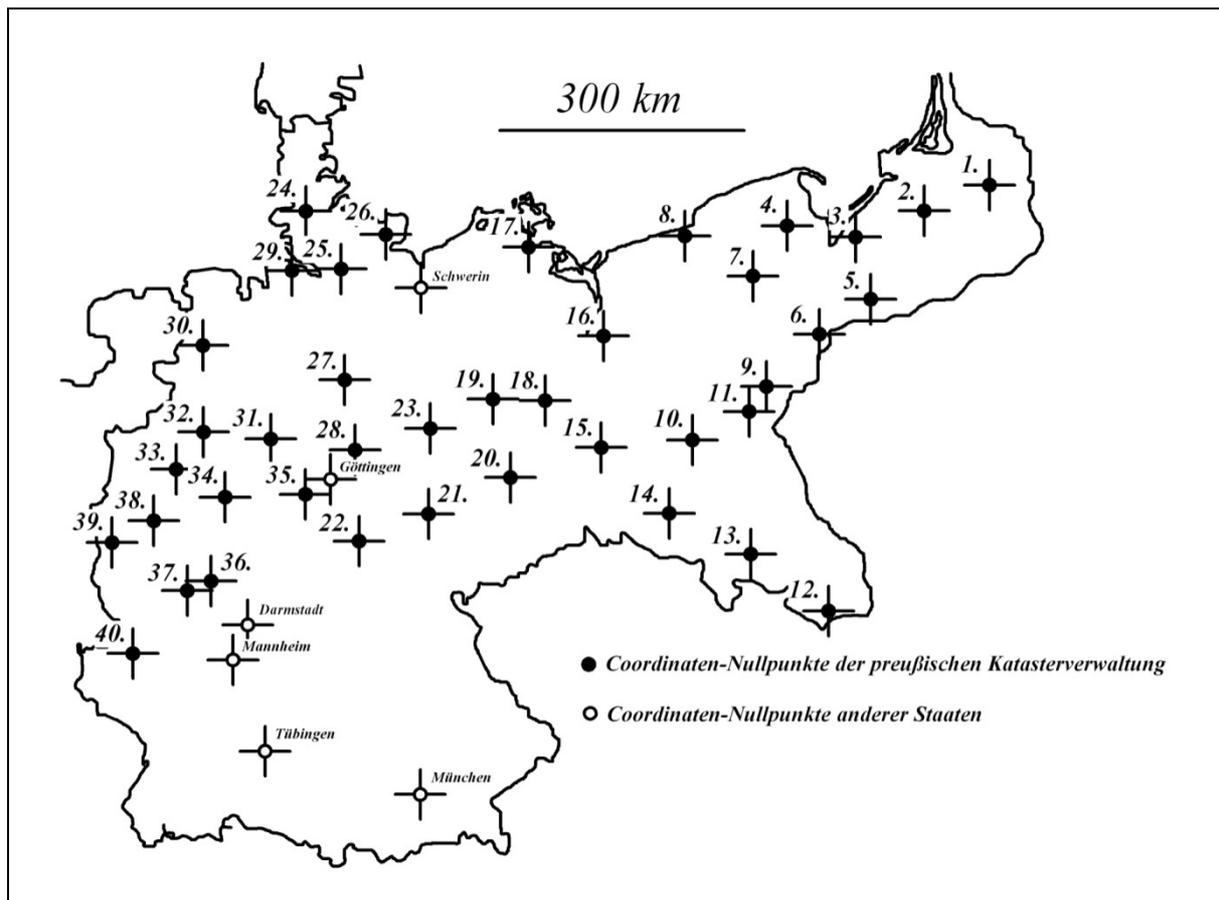
In der Landesvermessung ist es üblich, dass das Koordinatensystem mit  $+x$ -Achse nach Norden und mit der  $+y$ -Achse nach Osten ausgerichtet ist.

Die Abbildung 9 zeigt die im damaligen Deutschen Reich vorhandenen rechtwinkligen Koordinatensysteme, die vielfach auch eine größere Ausdehnung besaßen. Unterschieden wird dabei in die 40 Koordinaten-Nullpunkte der preußischen Katasterverwaltung, die in der Tabelle 1 aufgeführt und mit den entsprechenden Nummern in der Abbildung 9 zu finden sind.

Für den Fall größerer Ausdehnung darf die Erdkrümmung nicht vernachlässigt werden. In kleineren Bereichen dieser Systeme war es allerdings unschädlich, diese als ebene Koordinaten zu behandeln.

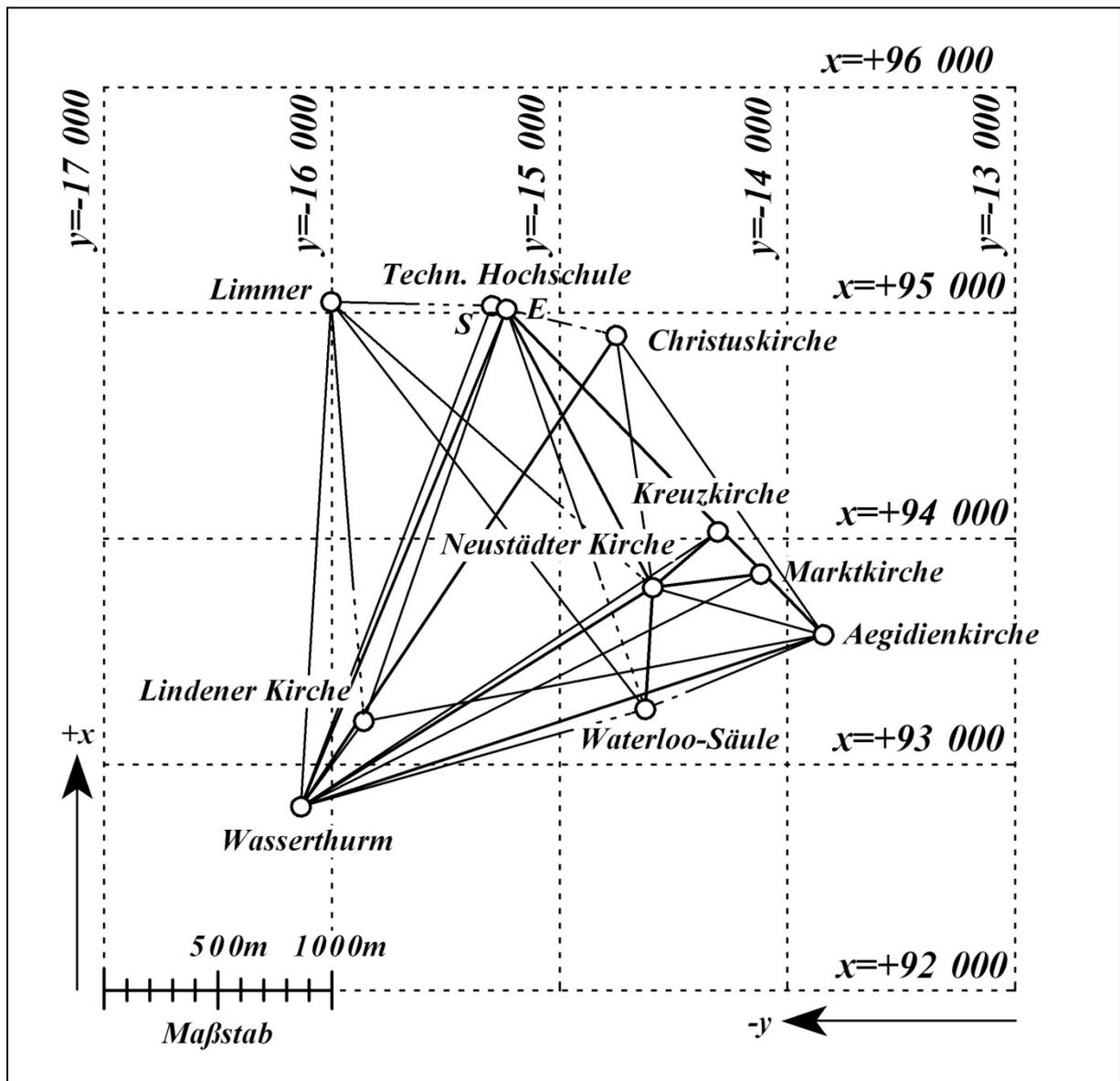
<b>Nr.</b>	<b>Coordinatennullpunkt</b>	<b>Breite</b>	<b>Länge</b>	<b>Geltungsbereich</b>
1.	Kucklingsberg	54°27'36,803"	39°37'18,354"	Gumbinnen
2.	Paulinen	54°17'21,157"	38°23'59,356"	Königsberg
3.	Markushof	54°03'31,728"	37°02'24,369"	Königsberg
4.	Thurmberg	54°13'31,874"	35°47'32,499"	Danzig
5.	Kauernik	53°23'21,593"	37°15'53,180"	Danzig
6.	Thorn	53°00'42,535"	36°16'26,117"	Marienwerder
7.	Heinrichsthal	53°42'46,411"	35°09'48,364"	Marienwerder
8.	Gollenberg	54°12'30,858"	33°53'46,444"	Köslin, Marienwerder
9.	Gnesen	52°32'17,535"	35°15'40,220"	Bromberg
10.	Josephsberg	51° 59'15,676"	33°52'01,598"	Frankfurt a. O., Bromberg, Posen
11.	Schroda	52°13'52,945"	34°56'40,635"	Posen
12.	Pschow	50°02'31,475"	36°03'45,998"	Oppeln
13.	Rummelsberg	50°42'12,682"	34°46'44,421"	Breslau
14.	Gröditzberg	51°10'41,496"	33°25'40,576"	Liegnitz
15.	Kaltenborn	52°55'44,5335"	32°19'43,6659"	Frankfurt a. O.
16.	Bahn	53°06'06,645"	32°22'05,203"	Stettin
17.	Greifswald	54°05'49,159"	31°02'43,705"	Stralsund
18.	Müggelsberg	52°25'07,134"	31°17'37,933"	Berlin, Potsdam
19.	Götzerberg	52°26'14,135"	30°23'43,787"	Potsdam
20.	Torgau	51°34'	30°40'	Merseburg
21.	Burkersroda	51°10'34,84"	29°18'25,85"	Merseburg
22.	Inselsberg	50°51'07,69"	28°03'00,31"	Kassel
23.	Magdeburg	52°08'	29°19'	Potsdam, Lüneburg
24.	Ostenfeld	54°28'12,675"	26°54'02,798"	Schleswig
25.	Rathkrügen	53°49'06,217"	27°42'31,926"	Schleswig
26.	Bungsberg	54°12'39,983"	28°23'34,911"	Schleswig
27.	Celle	52°37'32,924"	27°44'44,733"	Hannover
28.	Kaltenborn	51°47'46,545"	27°56'24,362"	Hildesheim, Magdeburg
29.	Silberberg	53°43'52,787"	26°43'17,781"	Stade, Hannover
30.	Windberg	52°52'51,566"	25°11'39,376"	Aurich, Osnabrück
31.	Hermannsdenkmal	51°54'47,182"	26°30'16,647"	Minden
32.	Münster	51°57'56,016"	25°17'14,372"	Münster
33.	Bochum	51°29'01,2540"	24°53'16,0590"	Münster
34.	Homert	51°15'52,27"	25°46'18,39"	Arnsberg
35.	Kassel	51°19'06,509"	27°09'56,956"	Kassel
36.	Schaumburg	50°20'23,63"	25°38'29,61"	Wiesbaden
37.	Fleckert	50°11'15,581"	00°30'26,474"	Koblenz
38.	Köln	50°56'33,346"	00°08'22,715"	Köln, Düsseldorf
39.	Langschofs	50°40'02,667"	00°48'33,185"	Aachen
40.	Rissenthal	49°28'40,8762"	24°25'31,1433"	Trier

**Tab. 1:** Koordinatennullpunkte der preußischen Katasterverwaltung



**Abb. 9:** Koordinatensysteme im damaligen Deutschen Reich

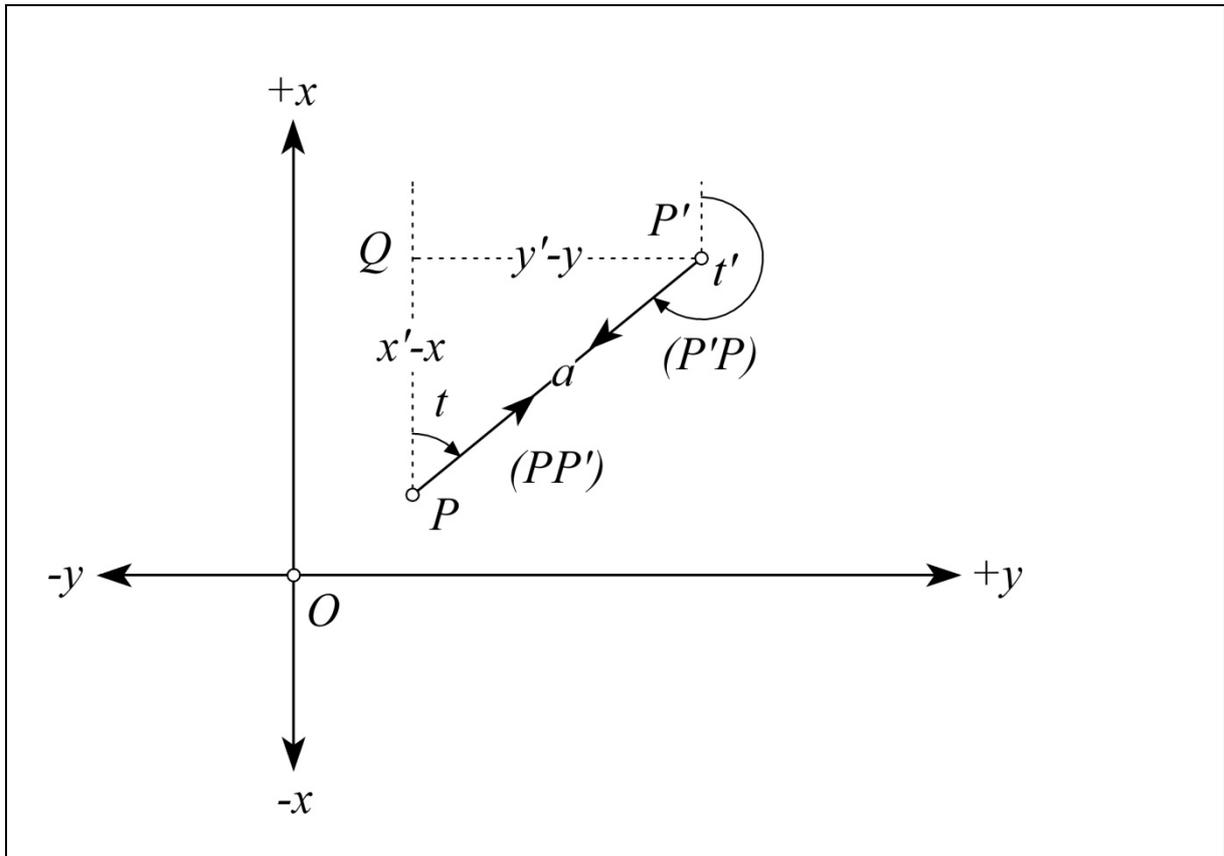
Die Abbildung 10 zeigt eine in den Jahren 1883 und 1884 angelegte Triangulation in Hannover, die im althannoverschen Gauß'schen Koordinatensystem mit dem Ursprung in Göttingen definiert ist. Diese wurde zu Schulzwecken unter Leitung von Prof. Dr. W. Jordan, der auch Logarithmentafeln herausgegeben hatte, von Studierenden ausgemessen.



**Abb. 10:** Triangulierung von Hannover 1883/84

Somit können nun die Grundformeln der in der Vermessungspraxis täglich vorkommenden Koordinaten und Azimut-Rechnungen angegeben werden.

Zur Veranschaulichung sind in der Abbildung 11 zwei Punkte  $P$  und  $P'$  durch ihre Koordinaten  $y, x$  und  $y', x'$  gegeben.



**Abb. 11:** Koordinaten- und Azimutrechnung

Damit ergeben sich folgende Beziehungen und Definitionen

*Strahl  $PP'$  hat das Azimut  $t \Leftrightarrow (PP')$*

*Strahl  $P'P$  hat das Azimut  $t' \Leftrightarrow (P'P)$*

$\Rightarrow t' = t \pm 180^\circ$  (Altgrad)

$\Rightarrow t' = t \pm 400 \text{ gon}$  (Neugrad).

(1)

Aus der Abbildung 11 lassen sich nun zwei Gleichungen entnehmen

$$y' - y = a \cdot \sin t = PP' \sin(PP')$$

$$x' - x = a \cdot \cos t = PP' \cos(PP'),$$

(2)

die nach Umkehrung der Strahlenrichtung auch folgende Form annehmen können

$$y - y' = a \cdot \sin t' = P'P \sin(P'P)$$

$$x - x' = a \cdot \cos t' = P'P \cos(P'P).$$

(3)

Damit kann die erste Aufgabe der Koordinatenbestimmung mit Hilfe der Entfernung  $a$  und des Richtungswinkels  $t$  gelöst werden. Die Beispiele sind aus der Abbildung 10 des Triangulationsnetzes von Hannover entnommen.

### Aufgabe 1

Gegeben sind die Koordinaten des Punkte Technische Hochschule, Eiserne Platte  $E$  sowie die Entfernung von  $a$  zur Waterloo-Säule und der Richtungswinkel bzw. das Azimut  $t$ . Eine kleine Umformung von (3) liefert

$$\begin{aligned} y' &= y + a \cdot \sin t \\ x' &= x + a \cdot \cos t. \end{aligned} \tag{4}$$

die gesuchten Koordinaten des Punktes Waterloo-Säule.

Nach Angabe der gegebenen Werte

$$\begin{aligned} y_E &= -15266,91m \\ x_E &= +95002,25m \\ a &= 1851,02m \\ t &= 160^\circ 46' 46'' \end{aligned}$$

lässt sich folgendes Rechenschema konstruieren

$\log a$	3.267 411	$\log a$	3.267 411
$\log \sin t$	9.517 467	$\log \cos t$	9.975 091n
$\log a \sin t$	2.784 878	$\log a \cos t$	3.242 502n
$a \sin t = (y' - y)$	+609,37	$a \cos t = (x' - x)$	-1747,84
<b><math>y'</math> Waterloo-Säule</b>	<b>-14657,54m</b>	<b><math>x'</math> Waterloo-Säule</b>	<b>+93254,41m</b>

und damit die Lösung finden.

### Aufgabe 2

Als zweite Aufgabe soll nun das Azimut von  $P$  nach  $P'$  und die Entfernung  $a = (PP')$  berechnet werden. Aus der Abb. 11 lassen sich die Gleichungen

$$\tan t = \frac{y' - y}{x' - x} \tag{5.1}$$

und

$$a = \frac{y' - y}{\sin t} \text{ oder } a = \frac{x' - x}{\cos t} \tag{5.2}$$

entnehmen, wobei in den Gleichungen von 5.2 die Nebenbedingung besteht, dass die Entfernung  $a$  stets positiv aus diesen Gleichungen hervorgehen soll. Damit muss  $\sin t$  das Vorzeichen von  $y' - y$  und  $\cos t$  das Vorzeichen von  $x' - x$  haben.

Dazu dient folgende mechanische Regel

<i>a</i> liegt im Quadranten	<b>I</b>	<b>II</b>	<b>III</b>	<b>IV</b>
Vorzeichen (y'-y) -Zähler-	+	+	-	-
Vorzeichen (x'-x) -Nenner-	+	-	-	+

Aus Aufgabe 1 sind die Koordinaten der Punkte Technische Hochschule, Eiserne Platte *E* und Waterloo-Säule gegeben. Gesucht ist jetzt das Azimut bzw. der Richtungswinkel und die Entfernung von der Technischen Hochschule zur Waterloo-Säule. Mit dem folgendem Rechenschema erhält man für das Azimut

<i>Waterloo-Säule</i>	$y' = -14657,54m$	$x' = +93254,41m$
<i>Technische Hochschule, E</i>	$y = -15266,81m$	$x = +95002,25m$
<i>Differenzen</i>	$y' - y = +609,37m$	$x' - x = -1747,84m$
$\log(y' - y)$	2.784881	
$\log(x' - x)$	3.242502n	
$\log \tan t$	9.542379n	

unter Berücksichtigung der Vorzeichen der Koordinatenunterschiede und des sich daraus ergebenden Quadranten dann *t* endgültig. Dabei ist *t* als  $90^\circ + t'$  anzusehen, wenn *t'* ein spitzer Winkel ist. Mit dem Wert **9.542379n** erhält man aus der Cot-Spalte der Logarithmentafel für  $t' = 70^\circ 46' 46''$  und damit

$$t = 90^\circ + t' = 160^\circ 46' 46''$$

Die Weiterrechnung mit den beiden Formeln nach (5.2) liefert

$\log(y' - y)$	2.784881	$\log(x' - x)$	3.242502n
$\log \sin t$	9.517467	$\log \cos t$	9.975091n
$\log a$	3.267414	$\log \cos t$	3.267411
<b><i>a</i></b>	<b>1851,04m</b>	<b><i>a</i></b>	<b>1851,02m</b>

dann die gewünschte Entfernung, wobei augenscheinlich die Resultate nicht genau übereinstimmen. Jordan sieht das zweite Ergebnis als das schärfere an und empfiehlt die Berechnung der Hypotenuse *a* aus der jeweils größeren Kathete unter Berücksichtigung der Anordnung der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen in den entsprechenden Tafeln für Winkel größer oder kleiner von  $45^\circ$ , wie die nachstehenden Bedingungsgleichungen aufzeigen.

$$y' - y < x' - x \Rightarrow \cos t \text{ oder } y' - y > x' - x \Rightarrow \sin t$$

Prof. Dr. W. Jordan gibt an dieser Stelle seines Lehrbuches [4] in Bezug auf die Verwendung von Logarithmentafeln die Empfehlung, dass zu Berechnungen in der Feld- und Landmessung eine fünfstellige und eine sechsstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel ausreichend ist. Eine siebenstellige Tafel ist hier selten erforderlich. Zusätzlich kann eine vierstellige Tafel für kleine Nebenrechnungen sehr nützlich sein. Während es an fünfstelligen Tafeln keinen Mangel gibt, empfiehlt er die eine bequeme sechsstellige Tafel für alte Teilung, nämlich die *Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln mit sechs Decimalstellen von Bremiker, Berlin*. Weiter führt er aus, dass vor 10 bis 20 Jahren siebenstellige logarithmische Rechnungen allge-

mein üblich waren, auch in Fällen, wo 6 und 5 Stellen ausreichten. Die Reaktion gegen solche Ziffernverschwendung ist jetzt aber teilweise ins Gegenteil umgeschlagen und es wird fünfstellige Rechnung teilweise zu sehr gepflegt. Er gibt den Rat, in der Rechnung eine Stelle mehr zu führen als der sachlichen Genauigkeit der einzelnen Zahl entspricht und hält daher z. B. bei Triangulierungsaufgaben eine mindestens sechsstellige Rechnung für unabdingbar.

Für diese häufig wiederkehrenden Berechnungen sind entsprechende Rechenformulare sehr nützlich. Die Abbildung 12.1 zeigt ein von Prof. W. Jordan entwickeltes Rechenchema für die Ermittlung von Azimut und Strecke, wie sie in den Aufgaben 1 und 2 behandelt wurde.

Berechnung der Azimute  $\alpha$  und der Entfernungen  $s$   
aus den rechtwinkligen Koordinaten  $xy$   $x'y'$  zweier Punkte  $P P'$   
*(Handbuch der Vermessungskunde I, Seite 281 -282)*  
 Azimut  $\alpha = (PP')$ ; Azimut  $\alpha' = (P'P)$ ; ( $\alpha' = \alpha \pm 180^\circ$ ); Entfernung  $s = PP' = P'P$

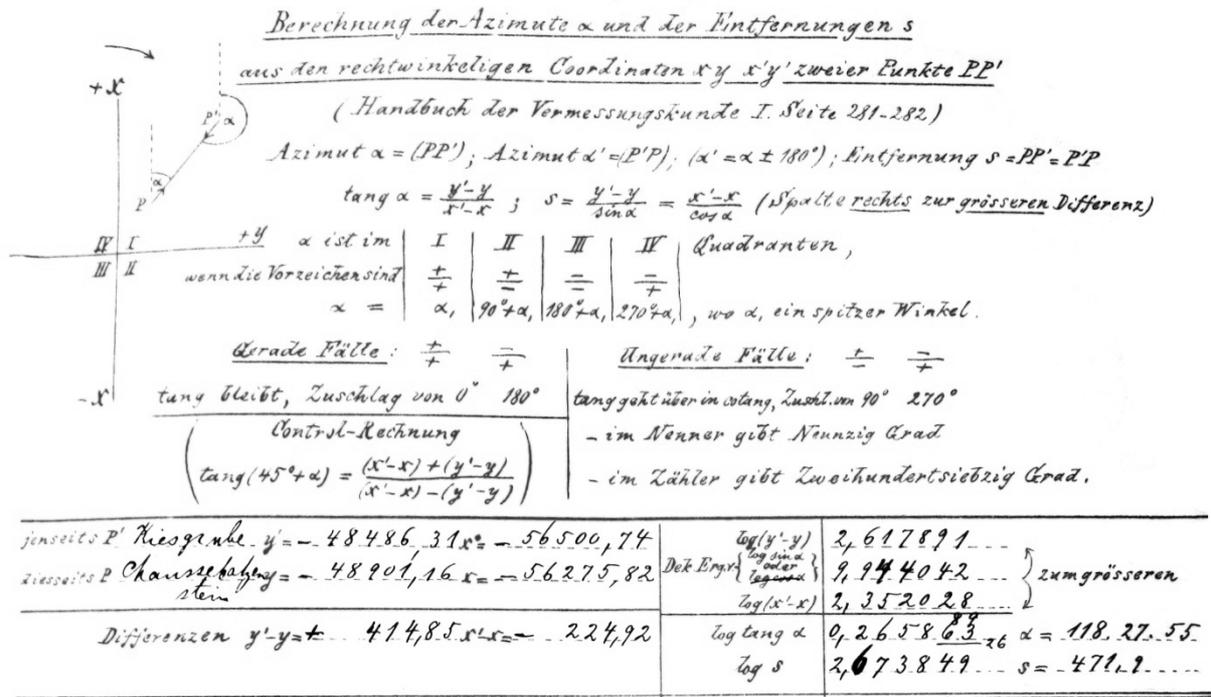
$\tan \alpha = \frac{y'-y}{x'-x}$  ;  $s = \frac{y'-y}{\sin \alpha} = \frac{x'-x}{\cos \alpha}$  (Spalte rechts zur grösseren Differenz)

	$\alpha$ ist im	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">I</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">II</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">III</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">IV</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="text-align: center;">-</td> <td style="text-align: center;">-</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="text-align: center;">-</td> <td style="text-align: center;">-</td> <td style="text-align: center;">+</td> </tr> </table>	I	II	III	IV	+	+	-	-	+	-	-	+	<b>Quadranten,</b>	
I	II	III	IV													
+	+	-	-													
+	-	-	+													
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">+</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">+</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">-</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">-</td> </tr> </table>	+	+	-	-	$\alpha = \alpha, 90^\circ + \alpha, 180^\circ + \alpha, 270^\circ + \alpha,$ , wo $\alpha$ ein spitzer Winkel.											
+	+	-	-													
<b>Gerade Fälle:</b>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">+</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">-</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">-</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">+</td> </tr> </table>	+	-	-	+	<b>Ungerade Fälle:</b> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">+</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">-</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">-</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">+</td> </tr> </table>			+	-	-	+				
+	-	-	+													
+	-	-	+													
<i>tang bleibt, Zuschlag von <math>0^\circ</math> <math>180^\circ</math></i>		<i>tang geht über in cotang, Zuschl. um <math>90^\circ</math> <math>270^\circ</math></i>														
<i>Control-Rechnung</i> $\left( \tan(45^\circ + \alpha) = \frac{(x'-x) + (y'-y)}{(x'-x) - (y'-y)} \right)$		<i>- im Nenner gibt Neunzig Grad</i> <i>- im Zähler gibt Zweihundertsiebzig Grad</i>														

jenseits $P'$ ..... $y' =$ ..... $x' =$ ..... diesseits $P$ ..... $y =$ ..... $x =$ .....	Dek Erg. v. $\left( \begin{matrix} \log(y'-y) \\ \log \sin \alpha \\ \log \cos \alpha \end{matrix} \right)$ ..... $\log(x'-x)$ .....	} zum grösseren }
Differenzen $y'-y =$ ..... $x'-x =$ .....	$\log \tan \alpha$ ..... $\alpha =$ ..... $\log s$ ..... $s =$ .....	

**Abb. 12.1:** Rechenformular zur Ermittlung von Strecke und Azimut

Die Abb. 12.2 zeigt ein Originalformular, welches bei einer Vermessungsübung im Raum Hameln um 1903 eingesetzt wurde.

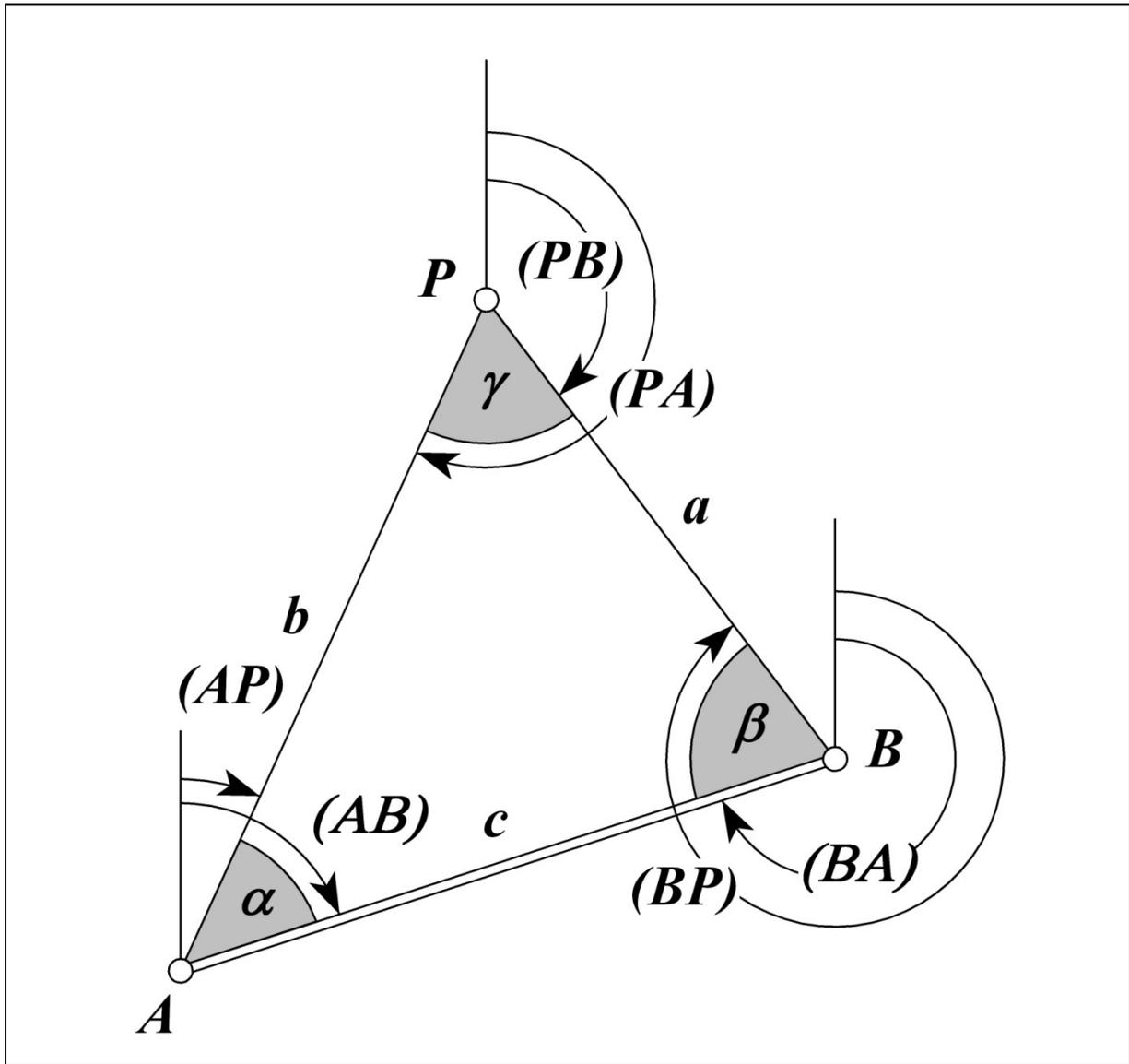


**Abb. 12.2:** Originalformular zur Berechnung von Azimut und Strecke

In den Aufgaben 1 und 2 wurden die Grundformeln zur Koordinatenberechnung behandelt. In den folgenden Beispielen werden als Weiterführung die Grundaufgaben der Triangulierungsrechnung dargestellt.

### Aufgabe 3

Nach Abbildung 13 sind die beiden Punkte  $A$  und  $B$  durch ihre Koordinaten gegeben. In dem sich durch den Punkt  $P$  ergebenden Dreieck  $ABP$  wurden die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  oder wenigstens  $\alpha, \beta$  gemessen. Gesucht sind die Koordinaten  $y, x$  des Punktes  $P$ . Sind in dem Dreieck  $ABP$  alle drei Winkel gemessen, so wird ihre Summe  $\alpha + \beta + \gamma$  wegen der unvermeidlichen Messungsfehler nicht genau  $180^\circ$  ergeben. Der sich ergebende Widerspruch wird gleich auf alle drei Winkel verteilt.



**Abb. 13:** Grundaufgabe der Triangulierung, Berechnungen im Dreieck

Die trigonometrische Berechnung beginnt mit der Ermittlung des Azimutes und der Länge der Basis bzw. Seite  $AB = c$  nach den in den Aufgaben 1 und 2 angegebenen Formeln.

$$\text{Azimut: } \tan(AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \quad (6)$$

$$\text{Basis: } AB = c = \frac{y_b - y_a}{\sin(AB)} \text{ oder } = \frac{x_b - x_a}{\cos(AB)} \quad (7)$$

Mit Hilfe des Sinus-Satzes ergeben sich die beiden weiteren Seiten des Dreiecks zu

$$AP = b = \frac{c}{\sin \gamma} \sin \beta \text{ und } BP = a = \frac{c}{\sin \gamma} \sin \alpha. \quad (8)$$

Mit dem Azimut ( $AB$ ) der Basis  $AB$  und den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  finden sich die Azimute der beiden anderen Seiten zum Punkt  $P$ .

$$(AP) = (AB) - \alpha$$

$$(BP) = (BA) + \beta = (AB) \pm 180^\circ + \beta$$

Nach den Grundgleichungen in (4) ergeben sich dann die Koordinaten von  $P$  zweifach.

$$\text{von A aus: } y_p = y_a + AP \sin(AP) \quad x_p = x_a + AP \cos(AP)$$

$$\text{von B aus: } y_p = y_b + BP \sin(BP) \quad x_p = x_b + BP \cos(BP)$$

Bevor die Berechnung durchgeführt wird, hier die gegebenen Messgrößen und Koordinaten.

### Messgrößen

	Gemessene Winkel			Ausgeglichene Winkel
$(\alpha)$	40°27'23"	Punkt A	$\alpha$	40°27'19"
$(\gamma)$	70°36'24"	Punkt P	$\gamma$	70°36'20"
$(\beta)$	68°56'25"	Punkt B	$\beta$	68°56'21"
	180°00'12"			180°00'00"

### Koordinaten

Punkt B	$y_b$	+5480,26m	$x_b$	-63843,22m
Punkt A	$y_a$	+3418,45m	$x_a$	-64524,94m
Koordinaten-Differenzen	$y_b - y_a$	+2061,81m	$x_b - x_a$	+681,72m

Dann ergibt sich das logarithmische Rechenschema.

Azimute ( $AB$ ), ( $BA$ ), ( $AP$ ) und ( $BP$ ) sowie Dreiecksseiten  $AP$ ,  $BP$

		$\log(y_b - y_a)$	3.314249	
		$\log \sin(AB)$	0.022529	
	oder	$\log \cos(AB)$		
		$\log(x_b - x_a)$	2.833606	
$(AB) =$	71°42'14"	$\log \tan(AB)$	0.480643	$(BA) =$ 251°42'14"
$-\alpha =$	-40°27'19"	$\log AB$	3.336778	$+\beta =$ +68°56'21"
$(AP) =$	31°14'55"	$\log \sin \gamma$	9.974629	$(BP) =$ 320°38'35"
		$\log(AB : \sin \gamma)$	3.362149	
	$\log(AB : \sin \gamma)$	3.362149	$\log(AB : \sin \gamma)$	3.362149
	$\log \sin \beta$	9.969975	$\log \sin \alpha$	9.812147
	$\log AP$	3.332124	$\log BP$	3.174296

## Koordinaten des Punktes $P$

Von A:

$\log AP$	3.332124	$\log AP$	3.332124
$\log \sin (AP)$	9.714960	$\log \cos (AP)$	9.931928
<b><math>\log AP \sin (AP)</math></b>	<b>3.047084</b>	<b><math>\log AP \cos (AP)</math></b>	<b>3.264052</b>
$y_p - y_a$	+1114,51m	$x_p - x_a$	+1836,76m
$y_a$	+3418,45m	$x_a$	-64524,94m
<b><math>y_p</math></b>	<b>+4532,96m</b>	<b><math>x_p</math></b>	<b>-62688,18m</b>

Von B:

$\log BP$	3.174296	$\log BP$	3.174296
$\log \sin (BP)$	9.802192n	$\log \cos (BP)$	9.888298
<b><math>\log BP \sin (BP)</math></b>	<b>2.976488n</b>	<b><math>\log BP \cos (BP)</math></b>	<b>3.062594</b>
$y_p - y_b$	-947,30m	$x_p - x_b$	+1155,03m
$y_b$	+5480,26m	$x_b$	-63843,22m
<b><math>y_p</math></b>	<b>+4532,96m</b>	<b><math>x_p</math></b>	<b>-62688,19m</b>

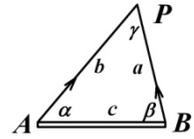
Mit hinreichender Genauigkeit hat man dann als endgültigen Wert für die Koordinaten des Punktes  $P$  den Mittelwert aus beiden Bestimmungen.

Auch für diese häufig auftretende Aufgabe hat Prof. W. Jordan ein Rechenformular entwickelt, welches in Abbildung 14.1 dargestellt ist.

## Vorwärts-Einschneiden

(Handbuch der Vermessungskunde II. Bd. S. 205 u. 239.)

$B$ .....	$y_b$ .....	$x_b$ .....	
$A$ .....	$y_a$ .....	$x_a$ .....	
$y_b - y_a$ .....		$x_b - x_a$ .....	
$\log y_b - y_a$ .....	$\log y_b - y_a$ .....	$\log x_b - x_a$ .....	
$\log x_b - x_a$ .....	$\log \sin(AB)$ .....	$\log \cos(AB)$ .....	
$\log \tan(AB)$ .....	$\log c$ .....	$\log c$ .....	
(AB) .....	(AP) .....	(BP) .....	
-(AP) .....	-(BP) .....	-(BA) .....	
$\alpha$ .....	$\gamma$ .....	$\beta$ .....	
$\log c$ .....	$\log c$ .....	$\alpha$ .....	
$\log \sin \gamma$ .....	$\log \sin \gamma$ .....	$\beta$ .....	
$\log c : \sin \gamma$ .....	$\log c : \sin \gamma$ .....	$\gamma$ .....	
$\log \sin \beta$ .....	$\log \sin \alpha$ .....	<u>180°00'00"</u>	
$\log b$ .....	$\log a$ .....		
$\log b$ .....	$\log b$ .....	$\log a$ .....	$\log a$ .....
$\log \sin(AP)$ .....	$\log \cos(AP)$ .....	$\log \sin(BP)$ .....	$\log \cos(BP)$ .....
$\log \Delta y_a$ .....	$\log \Delta x_a$ .....	$\log \Delta y_b$ .....	$\log \Delta x_b$ .....
$A y_a$ .....	$x_a$ .....	$B y_b$ .....	$x_b$ .....
$P \Delta y_a$ .....	$\Delta x_a$ .....	$\Delta y_b$ .....	$\Delta x_b$ .....
$P y$ .....	$x$ .....	$P y$ .....	$x$ .....
$Mittel$ .....			



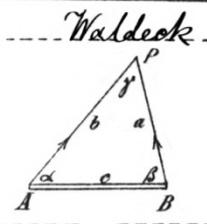
**Abb. 14.1:** Rechenformular zur Koordinatenbestimmung durch Vorwärts-Einschneiden

Die Originalversion ist in der Abbildung 14.2 zu finden. Diese Berechnung wurde ebenfalls im Rahmen einer Vermessungsübung im Bad Salzdetfurth im Jahre 1899 angestellt.

### Vorwärts-Einschneiden.

(Handbuch der Vermessungskunde II. Bd. S. 205 u. 239.)

<b>B</b> Käderfeld	$y_b = -22824,48$	$x_b = +71632,80$	
<b>A</b> Strengen	$y_a = -22063,64$	$x_a = +71328,60$	
	$y_b - y_a = -760,84$	$x_b - x_a = +304,20$	
$y_b - y_a$	$2,881293_n$	$y_b - y_a$	$2,881293_n$
$x_b - x_a$	$2,483159_n$	$\sin(AB)$	$9,967878_n$
$\tan(AB)$	$0,398134_n$	$c$	$2,913495_n$
$(AB)$	$221^\circ 42' 33''$	$(AP)$	$233^\circ 29' 32''$
$-(AP)$	$233^\circ 29' 32''$	$-(BP)$	$147^\circ 7' 33''$
$\alpha$	$58^\circ 18' 1''$	$\gamma$	$86^\circ 21' 59''$
$c$	$2,913496$	$c$	$2,913496$
$\sin \gamma$	$9,999126$	$\lambda \sin \gamma$	$9,999126$
$c \cdot \sin \gamma$	$2,914370$	$c \cdot \sin \gamma$	$2,914370$
$\sin \beta$	$9,762177$	$\sin \alpha$	$9,929834$
$b$	$2,676547$	$a$	$2,844204$
$b$	$2,676547$	$b$	$2,676547$
$\sin(AP)$	$9,905135_n$	$\cos(AP)$	$9,774465_n$
$\Delta y_a$	$2,581682_n$	$\Delta x_a$	$2,451012_n$
$A y_a$	$-22063,64$	$x_a$	$+71328,60$
$P y_a$	$-381,66$	$\Delta x_a$	$-282,50$
$P y$	$-22445,30$	$x$	$+71046,10$
	$y = -22445,30$	$x = +71046,10$	
	$y = -22445,42$	$x = +71046,28$	



*Waldeck*

**Abb. 14.2:** Originalformular zum Vorwärts-Einschneiden

Nach dem diese Grundaufgabe der Triangulierung behandelt wurde, ergibt sich in einer Abwandlung nach Abbildung 15 eine auch oft vorkommende Situation.

Dabei sollen die Koordinaten von **A** und **B** zur Bestimmung der Koordinaten des Punktes **P** herangezogen werden. Eine direkte Sichtverbindung von **A** nach **B** gibt es nicht, so dass die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  ebenfalls nicht direkt gemessen werden konnten. Lediglich auf den Punkten **A** und **B** sind Richtungsmessungen zu den Punkten **C**, **D** und **E** möglich, deren Koordinaten ebenfalls vorhanden sein mögen. Daraus lassen sich die entsprechenden Azimute  $(AC)$ ,  $(AD)$  und  $(BE)$  ableiten. Zusammen mit dem Azimut  $(AB)$  und den durch Richtungsmessung abgeleiteten Azimuten  $(AP)$  und  $(BP)$  lassen sich die dann die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  im Dreieck **ABP** berechnen.

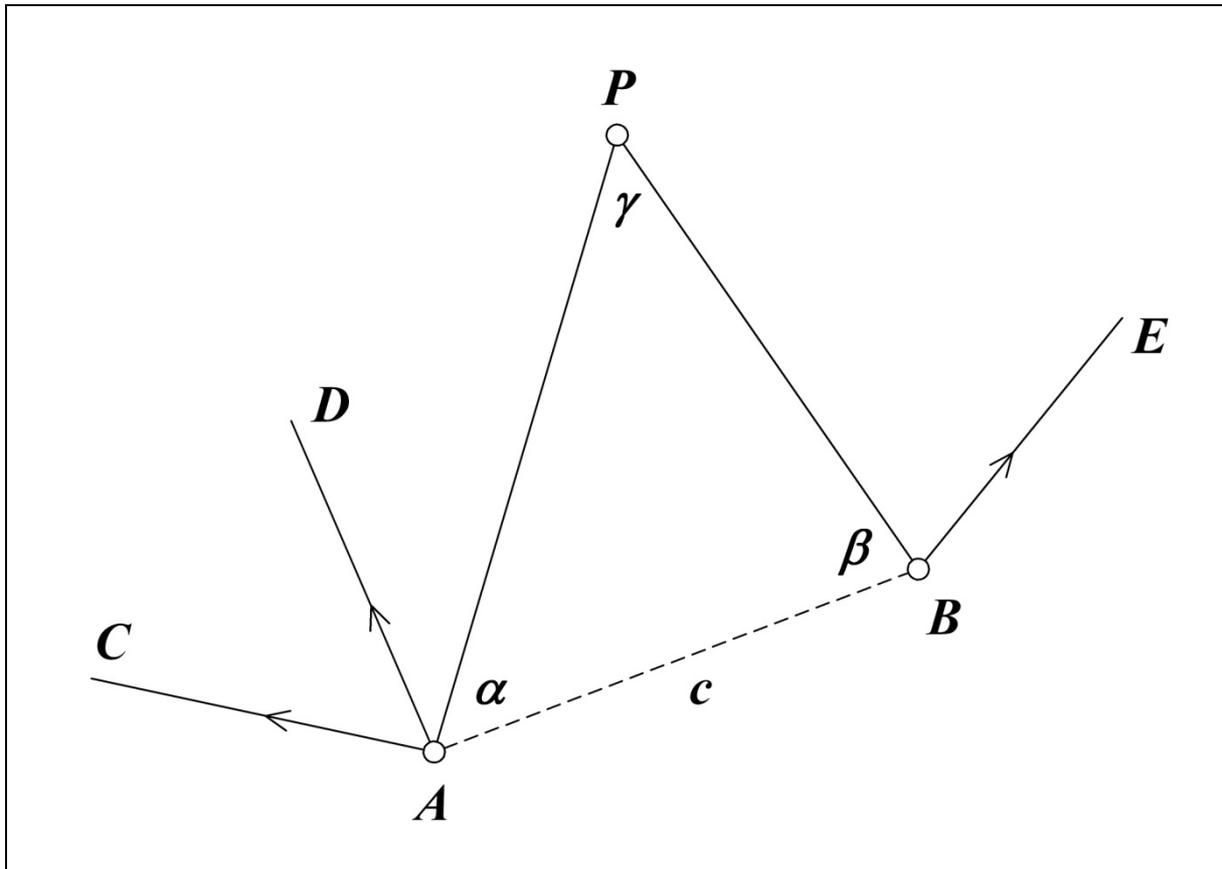
$$\alpha = (AB) - (AP)$$

$$\beta = (BP) - (BA)$$

$$\gamma = (AP) - (BP)$$

$$\text{Probe: } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ 00' 00''$$

Der weitere Rechenweg entspricht dann dem in Aufgabe 3 behandeltem Fall und wird an dieser Stelle nicht näher wiedergegeben.



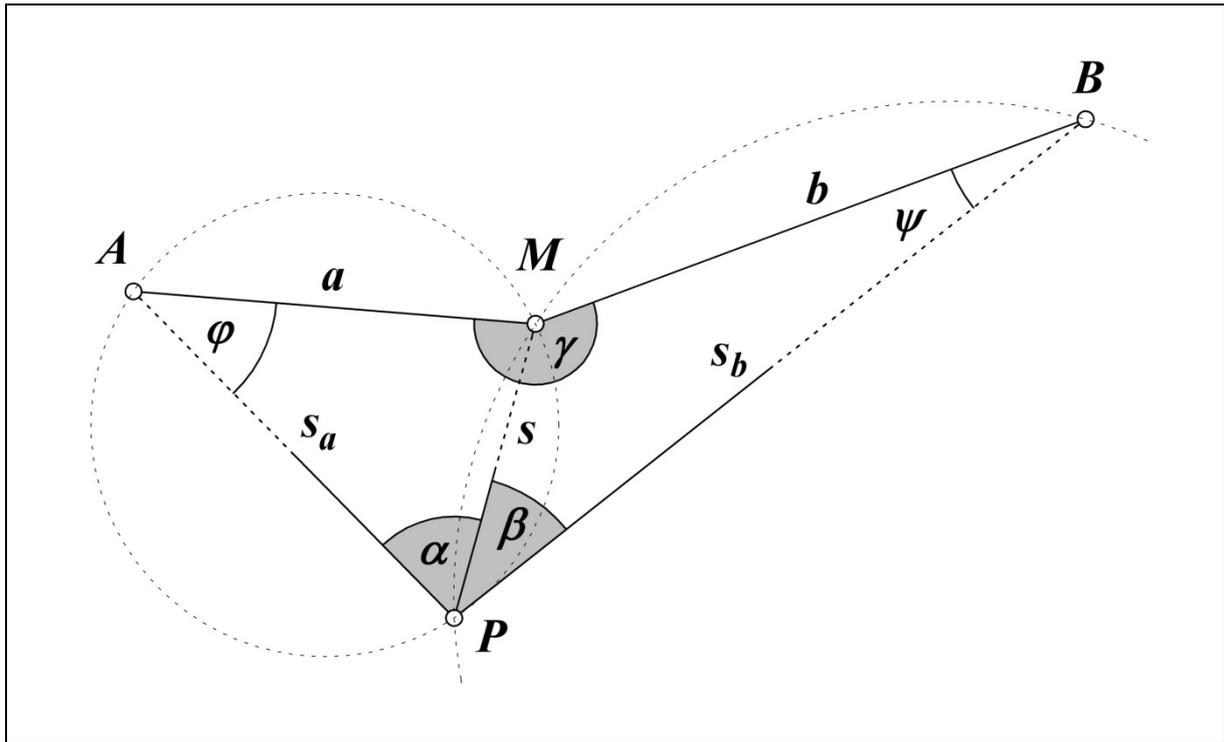
**Abb. 15:** Vorwärts-Einschneiden durch zwei Strahlen (Abwandlung von Aufgabe 3)

Die nun zu behandelnde Aufgabe 4 hat den ebenen Rückwärtsschnitt oder die Pothenotsche Aufgabe zum Inhalt. Sie wird nach dem französischen Geometer und Mathematiker Laurent Pothenot (1650 – 1732) benannt, der Mitglied der Académie royale des sciences war und als Professor am Collège de royale lehrte. Er arbeitete mit Jean-Dominique Cassini (1625 – 1712) und Philippe de La Hire (1640 -1718) zusammen.

#### Aufgabe 4

In der Abbildung 16 sind drei Punkte  $A$ ,  $M$  und  $B$  durch die beiden Entfernungen  $AM = a$  und  $BM = b$  sowie dem Winkel  $BMA = \gamma$  festgelegt. Ein Punkt  $P$  wird gegen  $A$ ,  $M$ ,  $B$  durch die Messung der beiden Winkel  $APM = \alpha$  und  $MPB = \beta$  bestimmt.

Gesucht sind zum einen die Entfernungen  $AP=s_a$ ,  $MP=s$  und  $BP=s_b$  und zum anderen die Winkel  $\varphi$  und  $\psi$ .



**Abb. 16:** Pothenotsche Aufgabe oder ebener Rückwärtsschnitt

Wie aus der Abbildung 16 leicht ersichtlich, besteht die geometrische Lösung aus dem Schnitt zweier Kreise über  $AM$  und  $MB$  mit den Peripheriewinkeln  $\alpha$  und  $\beta$ . Ein Versagen der Lösung ist dann gegeben, wenn alle vier Punkte  $A$ ,  $M$ ,  $B$  und  $P$  auf einem Kreis, dem sog. gefährlichen Kreis, liegen. An dieser Stelle soll aber auf weitere eingehende Betrachtungen dazu verzichtet werden. Lediglich die allgemeine Lösung dieses gängigen Verfahrens mit der logarithmischen Berechnung ist von alleinigem Interesse.

Betrachtet man die beiden Dreiecke  $AMP$  und  $BMP$ , so sind in keinem von beiden zwei bekannte Winkel vorhanden, so dass eine direkte Anwendung des Sinus-Satzes nicht möglich ist. Nun lassen sich die beiden Winkel  $\varphi$  und  $\psi$  als Unbekannte definieren und in folgenden Gleichungen ausdrücken.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi &= 360^\circ \text{ (Viereckssumme)} \\ \Rightarrow \frac{\varphi + \psi}{2} &= \frac{360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

Eine zweifache Anwendung des Sinussatzes ergibt

$$\begin{aligned} s &= \frac{a}{\sin \alpha} \sin \varphi = \frac{b}{\sin \beta} \sin \psi \\ \Rightarrow \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} &= \frac{\frac{b}{\sin \beta}}{\frac{a}{\sin \alpha}} \end{aligned} \quad (10)$$

Aus diesen beiden Gleichungen sollen die Winkel  $\varphi$  und  $\psi$  bestimmt werden, dazu ersetzt man den Quotienten durch den *cot* eines Hilfswinkels  $\mu$

$$\frac{\frac{b}{\sin \beta}}{\frac{a}{\sin \alpha}} = \frac{1}{\tan \mu} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}. \quad (11)$$

Die Nutzung der Additionstheoreme ergibt weiter

$$\begin{aligned} \frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} &= \frac{1 - \tan \mu}{1 + \tan \mu} \\ \sin \varphi - \sin \psi &= 2 \cdot \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \\ \sin \varphi + \sin \psi &= 2 \cdot \cos \frac{\varphi - \psi}{2} \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \\ \frac{1 - \tan \mu}{1 + \tan \mu} &= \cot(\mu + 45^\circ) \\ \Rightarrow \tan \frac{\varphi - \psi}{2} &= \tan \frac{\varphi + \psi}{2} \cot(\mu + 45^\circ) \end{aligned} \quad (12)$$

schlussendlich

$$\begin{aligned} \frac{\varphi + \psi}{2} + \frac{\varphi - \psi}{2} &= \varphi \\ \frac{\varphi + \psi}{2} - \frac{\varphi - \psi}{2} &= \psi. \end{aligned} \quad (13)$$

Die Berechnung von  $s$  erfolgt zur Probe und die beiden Entfernungen  $s_a$  und  $s_b$  werden dann mit dem Sinus-Satz berechnet.

$$s_a = \frac{a}{\sin \alpha} \sin(\varphi + \alpha) \quad \text{und} \quad s_b = \frac{b}{\sin \beta} \sin(\psi + \beta) \quad (14)$$

Damit ist die eigentliche pothenotische Rechnung abgeschlossen. Daran schließt sich das logarithmische Rechenschema mit einem Zahlenbeispiel aus dem Triangulationsnetz Hannover:

Gegeben sind die Messgrößen:

$$\begin{aligned}
 & \gamma = 174^{\circ}13'37'' \\
 & \alpha = 24^{\circ}58'47'' \\
 & \beta = 41^{\circ}02'58'' \\
 a = 841,561m & \quad \gamma + \alpha + \beta = 240^{\circ}15'22'' \\
 b = 1553,664m & \quad \varphi + \psi = 119^{\circ}44'38'' \Rightarrow \gamma + \alpha + \beta + \varphi + \psi = 360^{\circ} \\
 & \frac{\varphi + \psi}{2} = 59^{\circ}52'19''
 \end{aligned}$$

Logarithmische Berechnung

$\log a$	2.925086	$\log b$	3.191357
$\log \sin \alpha$	9.625618	$\log \sin \beta$	9.817374
$\log(a:\sin \alpha)$	3.299468	$\log(b:\sin \beta)$	3.373983
$\log(b:\sin \beta)$	3.373983		
$\log \tan \mu$	9.925485		
$\log \cot(\mu+45^{\circ})$	8.932366		
$\log \tan((\varphi+\psi)/2)$	0.236322		
$\log \tan((\varphi-\psi)/2)$	9.168688		

Ergebnis

$$\begin{aligned}
 \mu &= 40^{\circ}06'31'' \\
 \mu+45^{\circ} &= 85^{\circ}06'31'' \\
 (\varphi+\psi)/2 &= 59^{\circ}44'38'' \\
 (\varphi-\psi)/2 &= 08^{\circ}23'19'' \\
 \hline
 \varphi &= 68^{\circ}15'38'' \\
 \psi &= 51^{\circ}29'00''
 \end{aligned}$$

Der Übergang zur praktischen Lösung geschieht mit Hilfe von Koordinaten, denn normalerweise werden die Entfernungen  $AM=a$  und  $BM=b$  sowie der Winkel  $BMA=\gamma$  selten gemessen, hier liegen dann die Koordinaten der Punkte  $A(y_a, x_a)$ ,  $M(y_m, x_m)$  und  $B(y_b, x_b)$  vor. Lediglich auf dem Punkt P werden die Winkel  $APM=\alpha$  und  $MPB=\beta$  gemessen. Gesucht sind dann die Koordinaten des Punktes  $P(y, x)$ .

Auch hier kommen wieder die allgemeinen Koordinaten- und Azimutformeln aus den vorangegangenen Aufgaben zur Anwendung. Das folgende Rechenschema aus dem Triangulationsnetz von Hannover gibt die Lösung wieder.

1)

	<b>Gemessene Richtungen</b>		<b>Winkel</b>	
<i>P</i>	A Ägidius	136°53'05"	$\alpha=$	<b>24°58'47"</b>
<i>Technische Hochschule</i>	M Waterloo	161°51'52"	$\beta=$	<b>41°02'58"</b>
	B Wasserturm	202°54'50"	$\alpha+\beta=$	<b>66°01'45"</b>

2)

	<b>y</b>		<b>x</b>	
<i>M Waterloo</i>	-14657,52m	+93254,39m	<i>M Waterloo</i>	-14657,52m +93254,39m
<i>A Ägidius</i>	-13879,79m	+93575,89m	<i>B Wasserturm</i>	-16145,76m +92808,28m
<i>Differenzen (M-A)</i>	-777,73m	-321,50	<i>Differenzen (M-B)</i>	+1488,24m +446,11m
	$y_m-y_a$	$x_m-x_a$	$y_m-y_b$	$y_m-x_b$

*Probe:  $(y_m-y_a)-(y_m-y_b)=y_b-y_a$  und  $(x_m-x_a)-(x_m-x_b)=x_b-x_a$*

3)

$(AM)=$	247°32'26"
$(BM)=$	73°18'49"
$\gamma=$	174°13'37"
$\alpha+\beta=$	66°01'45"
$\gamma+\alpha+\beta=$	240°15'22"
$\varphi+\psi=$	119°44'88"
$\gamma+\alpha+\beta+\varphi+\psi=$	360°00'00"

4)

$\log (y_m-y_a)$	2.890829n	$\log (y_m-y_b)$	3.172673
<i>Erg. <math>\log \sin (AM)</math></i>	0.034257	<i>Erg. <math>\log \sin (BM)</math></i>	0.018684
<i>oder <math>\log \cos (AM)</math></i>		<i>oder <math>\log \cos (BM)</math></i>	
$\log (x_m-x_a)$	2.507181n	$\log (x_m-x_b)$	2.649442
$\log \tan (AM)$	0.383648	$\log \tan (BM)$	0.523231
$\log a$	2.925086	$\log b$	3.191357
$\log \sin \alpha$	0.625618	$\log \sin \beta$	9.817374
$\log (a:\sin \alpha)$	3.299468	$\log (b:\sin \beta)$	3.373983
$\log (b:\sin \beta)$	3.373983		
$\log \tan \mu$	9.925485		
$\log \cot (\mu+45^\circ)$	8.932366		
$\log \tan ((\varphi+\psi)/2)$	0.236322		
$\log \tan ((\varphi-\psi)/2)$	9.168688		

5)

$\mu=$	40°06'31"		
$\mu+45^\circ=$	85°06'31"		
$(\varphi+\psi)/2=$	59°52'19"		
$(\varphi-\psi)/2=$	08°23'19"		
$\varphi=$	<b>68°15'38"</b>	$\psi=$	<b>51°29'00"</b>
$\alpha=$	24°58'47"	$\beta=$	41°02'58"
$\varphi+\alpha=$	<b>93°14'25"</b>	$\psi+\beta=$	<b>92°31'58"</b>
	<i>Winkel-Probe <math>(\varphi+\alpha)+(\psi+\beta)+\gamma=</math></i>		<b>360°00'00"</b>

6)

$\log(a:\sin\alpha)$	3.299468	$\log(a:\sin\alpha)$	3.299468
$\log \sin(\varphi+\alpha)$	9.999305	$\log \sin\varphi$	9.967958
<b><math>\log s_a</math></b>	<b>3.298773</b>	<b><math>\log s</math></b>	<b>3.267426</b>
$\log(b:\sin\beta)$	3.373983	$\log(b:\sin\beta)$	3.373983
$\log \sin(\psi+\beta)$	9.999575	$\log \sin\psi$	9.893444
<b><math>\log s_b</math></b>	<b>3.373558</b>	<b><math>\log s</math></b>	<b>3.267427</b>

7) (Proben)

(AM)= 247°32'26"	(AP)= 315°48'04"	(BP)= 21°49'49"	(BM)= 73°18'49"
+ $\varphi$ = +68°15'38"	+ $\alpha$ = +24°58'47"	- $\beta$ = -41°02'58"	- $\psi$ = -51°29'00"
(AP)= 315°48'04"	(MP)= 340°46'51"	(MP)= 340°46'51"	(BP) 21°49'49"

8)

$\log s_a$	3.298773	$\log s_a$	3.298773
$\log \sin(AP)$	9.843327n	$\log \cos(AP)$	9.855473
$\log \Delta y_a$	3.142100n	$\log \Delta x_a$	3.154246
$\log s_b$	3.373558	$\log s_b$	3.373558
$\log \sin(BP)$	9.570378	$\log \cos(BP)$	9.967684
$\log \Delta y_b$	2.943936	$\log \Delta x_b$	3.341242

9)

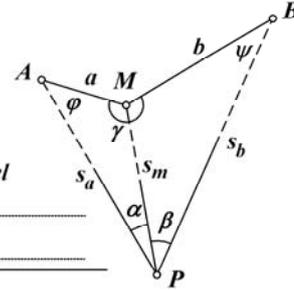
A $y_a$ =	-13879,79m	$x_a$ =	+93575,89m
$\Delta y_a$ =	-1387,08m	$\Delta x_a$ =	+1426,42m
P $y$ =	-15266,87m	$x$ =	+95002,31m
B $y_b$ =	-16145,76m	$X_b$ =	+92808,28m
$\Delta y_b$ =	+878,90m	$\Delta x_b$ =	+2194,03m
P $y$ =	-15266,86m	$x$ =	+95002,31m
<b>Technische Hochschule</b>	<b>-15266,86m</b>		<b>95002,31m</b>
<b>(Eisenplatte E)</b>			

Damit ist die pothenotische Aufgabe als eines der grundlegenden Berechnungsmöglichkeiten bei der Triangulierung gelöst.

Auch dazu hat Prof. W. Jordan ein Rechenformular entwickelt, welches in der Abbildung 17.1 dargestellt ist.

# Rückwärts-Einschneiden

Handbuch der Vermessungskunde 4. Aufl. 2. Bd. S. 300.



	Gemessene Richtungen	Winkel
A	_____	$\alpha$ _____
P	M _____	$\beta$ _____
	B _____	$\alpha + \beta$ _____

	y	x		y	x
M	_____	_____		_____	_____
A	_____	_____		_____	_____
Differenzen M-A	$y_m - y_a$	$x_m - x_a$	Differenzen M-B	$y_m - y_b$	$x_m - x_b$

Probe:  $(y_m - y_a) - (y_m - y_b) = y_b - y_a$  und  $(x_m - x_a) - (x_m - x_b) = x_b - x_a$

$\log(y_m - y_a)$	(AM) = _____	$\log(y_m - y_b)$
$\log \frac{\sin}{\cos}(AM)$	(BM) = _____	$\log \frac{\sin}{\cos}(BM)$
$\log(x_m - x_a)$	$\gamma =$ _____	$\log(x_m - x_b)$
$\log \text{tng}(AM)$	$\alpha + \beta =$ _____	$\log \text{tng}(BM)$
$\log a$	$\alpha + \beta + \gamma =$ _____	$\log b$
$\log \sin \alpha$	$\varphi + \psi =$ _____	$\log \sin \beta$
$\log(a : \sin \alpha)$	$\mu =$ _____	$\log(b : \sin \beta)$
$\log(b : \sin \beta)$	$\mu + 45^\circ =$ _____	<b>Winkelprobe</b>
$\log \text{tng} \mu$	$\frac{1}{2}(\varphi + \psi) =$ _____	$(\varphi + \alpha) + (\psi + \beta) + \gamma = 360^\circ$
$\log \text{cotng}(\mu + 45^\circ)$	$\frac{1}{2}(\varphi - \psi) =$ _____	$\varphi =$ _____
$\log \text{tng} \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$	$\varphi =$ _____	$\beta =$ _____
$\log \text{tng} \frac{1}{2} \varphi \psi$	$\alpha =$ _____	$\psi + \beta =$ _____
	$\varphi + \alpha =$ _____	

$\log(a : \sin \alpha)$	$\log(a : \sin \alpha)$	$\log(b : \sin \beta)$	$\log(b : \sin \beta)$
$\log \sin(\varphi + \alpha)$	$\log \sin \varphi$	$\log \sin \psi$	$\log \sin(\psi + \beta)$
$\log s_a$	$\log s_m$	$\log s_m$	$\log s_b$

Probe:

(AM) = _____	(AP) = _____	(BP) = _____	(BM) = _____
+ $\varphi =$ _____	+ $\alpha =$ _____	- $\beta =$ _____	- $\psi =$ _____
(AP) = _____	(MP) = _____	(MP) = _____	(BP) = _____

$\log s_a$	$\log s_a$	$\log s_b$	$\log s_b$
$\log \sin(AP)$	$\log \cos(AP)$	$\log \sin(BP)$	$\log \cos(BP)$
$\log \Delta y_a$	$\log \Delta x_a$	$\log \Delta y_b$	$\log \Delta x_b$

A: $y_a =$ _____	A: $x_a =$ _____	B: $y_b =$ _____	B: $x_b =$ _____
$\Delta y_a =$ _____	$\Delta x_a =$ _____	$\Delta y_b =$ _____	$\Delta x_b =$ _____
P: $y =$ _____	P: $x =$ _____	P: $y =$ _____	P: $x =$ _____

P: \_\_\_\_\_ y = \_\_\_\_\_ x = \_\_\_\_\_

Hannover, Technische Hochschule, 1896.

**Abb. 17.1:** Rechenformular zur pothenotischen Punktbestimmung (Rückwärts-Einschneiden)

Auch dazu gibt es ein Original-Berechnungsformular im Rahmen einer Schlussvermessungsübung im Raum Bad Salzdetfurth aus dem Jahre 1899.

Rückwärts - Einschnneiden.  
Handbuch der Vermessungskunde 4. Aufl. 2. Bd. S. 300.

Gemessene Richtungen		Winkel	
A Richtung A	0 0 0	alpha	41 38 56
P Richtung M	41 38 56	beta	76 14 36
B Richtung B	117 53 32	alpha + beta	117 53 32

M	y	x	M	y	x
	-21504.49	+71371.51		-21504.49	+71371.51
A	-21519.38	+72341.35	B	-22794.98	+70973.20
Differenzen M-A	+114.89	-969.84	Differenzen M-B	+1290.49	+398.31
	y <sub>m</sub> - y <sub>a</sub>	x <sub>m</sub> - x <sub>a</sub>		y <sub>m</sub> - y <sub>b</sub>	x <sub>m</sub> - x <sub>b</sub>

Probe: (y<sub>m</sub> - y<sub>a</sub>) - (y<sub>m</sub> - y<sub>b</sub>) = y<sub>b</sub> - y<sub>a</sub> und (x<sub>m</sub> - x<sub>a</sub>) - (x<sub>m</sub> - x<sub>b</sub>) = x<sub>b</sub> - x<sub>a</sub>

log(y <sub>m</sub> - y <sub>a</sub> )	2.059904	4 <sub>1</sub> (AM)	173 15 0	log(y <sub>m</sub> - y <sub>b</sub> )	3.110755
" sin(AM)	7.996979	(BM)	22 50 50	" sin(BM)	9.980241
" cos(AM)	2.986700	y	100 24 10	" cos(BM)	9.600221
" tan(AM)	9.073297	alpha + beta	117 53 32	" tan(BM)	0.510534
" alpha	2.949721	alpha + beta + gamma	218 17 42	" b	3.160514
" sin alpha	9.822537	phi + psi	141 42 18	" sin beta	9.987360
" (a : sin alpha)	3.167184			" b : sin beta	3.143154
" (b : sin beta)	3.143154	mu	46 35 4		
" tan mu	0.024030	mu + 45°	91 35 4		
" cotang(mu + 45°)	8.441865	1/2(phi + psi)	70 51 9		
" tan 1/2(phi + psi)	0.459408	1/2(phi - psi)	-4 33 18		
" tan 1/2(phi - psi)	8.901273	phi	66 17 51		
		alpha	41 38 56		
		phi + alpha	107 56 47		
		psi	75 24 27		
		psi + beta	151 39 3		

Winkelprobe  
(phi + alpha) + (psi + beta) + gamma = 360°

log(a : sin alpha)	3.167184	log(a : sin alpha)	3.167184	log(b : sin beta)	3.143154	log(b : sin beta)	3.143154
" sin(phi + alpha)	9.978338	" sin phi	9.961727	" sin psi	9.985760	" sin(phi + beta)	9.676574
" s <sub>a</sub>	3.143154	" s <sub>m</sub>	3.128911	" s <sub>m</sub>	3.138914	" s <sub>b</sub>	2.819728

Probe:

(AM) = 173 15 0	(AP) = 239 32 51	(BP) = 357 26 23	(BM) = 22 50 50
+ phi = 66 17 51	+ alpha = 41 38 56	- beta = 76 14 36	- psi = 75 24 27
(AP) = 239 32 51	(MP) = 281 11 27	(MP) = 281 11 27	(BP) = 357 26 23

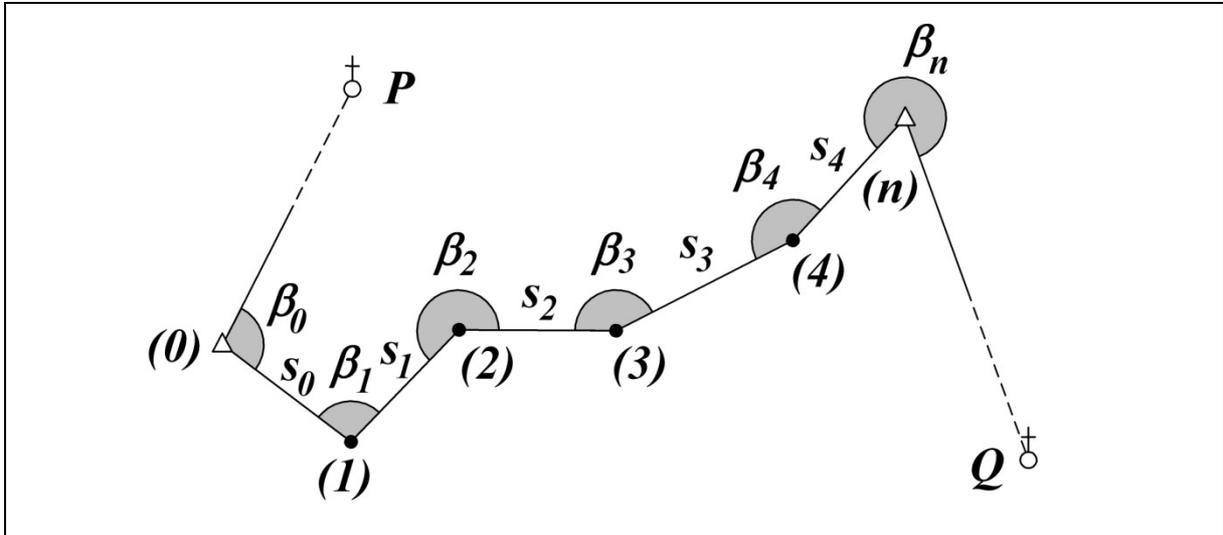
log s <sub>a</sub>	3.143154	log s <sub>a</sub>	3.143154	log s <sub>b</sub>	2.819728	log s <sub>b</sub>	2.819728
" sin(AP)	9.935532	" cos(AP)	9.784857	" sin(BP)	8.650020	" cos(BP)	9.995666
+ delta y <sub>a</sub>	3.081054	+ delta x <sub>a</sub>	2.850378	+ delta y <sub>b</sub>	1.469748	+ delta x <sub>b</sub>	3.819224
A: y <sub>a</sub> = -21504.49	x <sub>a</sub> = +72341.35	B: y <sub>b</sub> = -22794.98	x <sub>b</sub> = +70973.20				
delta y <sub>a</sub> = +2205.19	delta x <sub>a</sub> = -708.54	delta y <sub>b</sub> = -29.50	delta x <sub>b</sub> = +659.62				
P: y = -22824.47	x = +71632.80	P: y = -22824.48	x = +71632.82				

P: Podersfeld y = -22824.48 x = +71632.80

Hannover, Technische Hochschule, 1898.

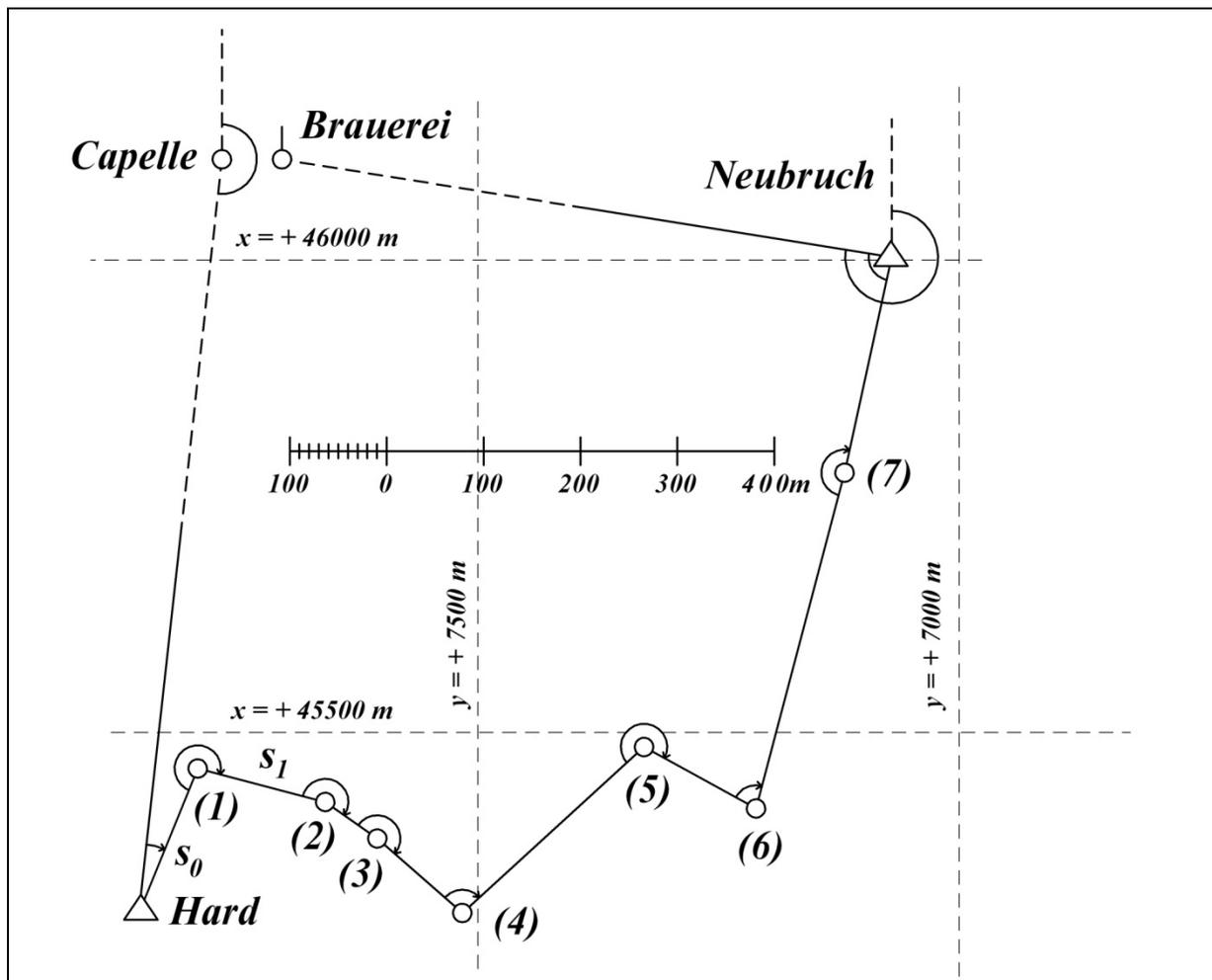
Abb. 17.2: Originalformular zur Pothenotischen Punktbestimmung (Rückwärts-Einschnneiden)

Die weitere Verdichtung im trigonometrischen Netz der Landesvermessung zur Schaffung von Vermessungspunkten für den Zweck der Detail- und Katastervermessung wurde u. a. vielfach mit Polygonzügen erzielt. Dabei wurden die trigonometrischen Punkte durch Richtungs-, Winkel- und Streckenmessungen miteinander verbunden, wie es in der Abbildung 18.1 ersichtlich ist.



**Abb. 18.1:** Polygonzug

Der dargestellte Polygonzug verbindet die Punkte  $(0)$  und  $(n)$  durch Winkel- und Streckenmessungen mit Richtungsmessungen zu den Fernzielen  $P$  und  $Q$ . Ziel der Vermessungsaufgabe ist es, die Koordinaten der Punkte  $(1)$  bis  $(4)$  zu bestimmen. Bekannt sind die Koordinaten der Punkte  $(0)$ ,  $(n)$ ,  $P$  und  $Q$ . Dabei kommen die bisher in der Triangulierung bekannten Rechenformeln zur Anwendung. Auf eine ausführliche Darstellung aller Formeln wird an dieser Stelle bewusst verzichtet. Zur Veranschaulichung dient ein aus [4] entnommenes Beispiel (Abbildung 18.2).

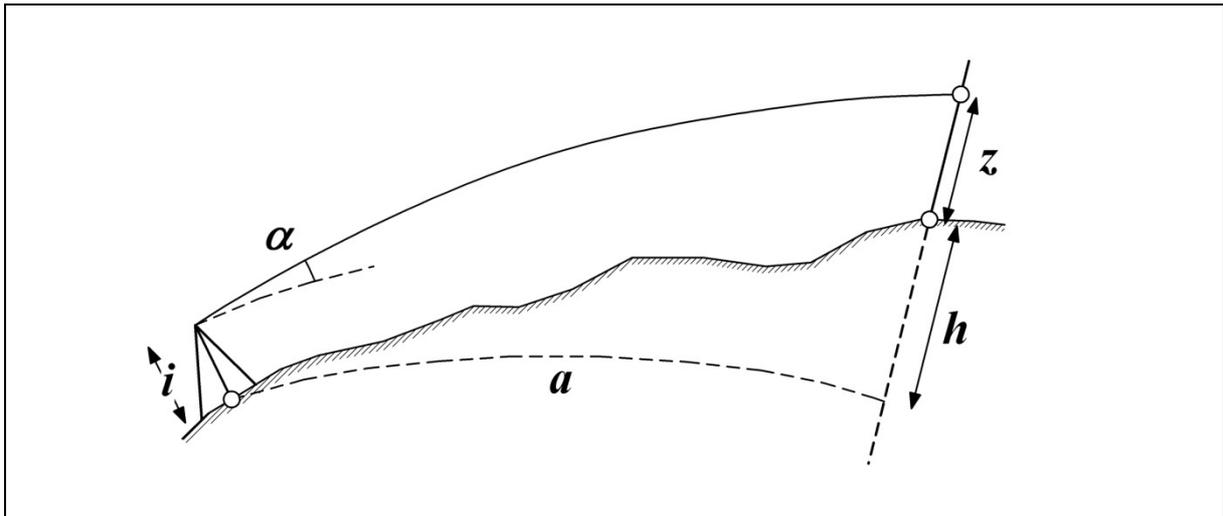


**Abb. 18.2:** Beispiel eines Polygonzuges

Dieses Beispiel entstammt einer Vermessung in der Gemarkung Grünwinkel bei Karlsruhe. Der Polygonzug umfasst 7 Punkte, die es koordinatorisch zu bestimmen gilt. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte Hard, Neubruch, Capelle und Brauerei.

Das Rechenschema mit logarithmischer Berechnung zeigt die Abbildung 19, welches ebenfalls in [4] dargestellt ist.





**Abb. 20:** Einseitige trigonometrische Höhenübertragung

### Aufgabe 5

Unter Berücksichtigung der Instrumentenhöhe  $i$  und der anvisierten Zielpunkthöhe  $z$  ergibt sich nach Abbildung 20 die Grundformel für die einseitige Höhenübertragung

$$h = a \cdot \tan \alpha + \frac{1-k}{2r} a^2 + i - z \quad (15)$$

Mit folgenden Bedeutungen:

- $h$  = gesuchter Höhenunterschied [m]
- $a$  = Distanz Standpunkt-Zielpunkt
- $r$  = Erdradius
- $k$  = Refraktionskoeffizient (= 0,13)
- $\alpha$  = gemessener Höhenwinkel

Der Term

$$\frac{1-k}{2r} a^2 \quad (16)$$

berücksichtigt den Einfluss von Erdkrümmung und Strahlbrechung.

Als Beispiel für die Ableitung eines Höhenunterschiedes mit diesem Verfahren wird die in [4] enthaltene Berechnung wiedergegeben.

		y	x	
<b>Standpunkt</b>	Karlsruhe, Polytechnikum, Pfeiler	+3508,36m	+53046,50m	$i=0,27m$
<b>Zielpunkt</b>	Durlacher Warte, Signalkugel	-1892,36m	+54452,14m	$z=2,11m$
<b>Differenzen</b>		<u>+5400,72m</u>	<u>-1405,64m</u>	

Ableitung der Distanz  $a$  (siehe auch Aufgabe 1 und 2)

$\log 5400,72$	$3.732452$	$\log a =$	$3.746690$	$a =$	$5580,71m$
$\log \sin \alpha$	$0.014238$				
$\log 1405,64$	$3.147874$				
$\log \tan \alpha$	$0.584578$				

Mit dem gemessenen Höhenwinkel

$$\alpha = +1^{\circ}26'18''$$

ergibt sich das logarithmische Rechenschema

$\log a$	$3.746690$		
$\log \tan \alpha$	$8.399828$		
$\log a \tan \alpha$	$2.146518$	$a \tan \alpha =$	$+140,13m$

Der Einfluss von Erdkrümmung und Strahlbrechung kann aus den von Prof. W. Jordan entwickelten Hilfstafeln [4] entnommen werden. Die Abbildung 21.1 zeigt auszugsweise die Hilfstafel für den Korrekturterm bei gegebener Strecke  $a$  und die Abbildung 21.2 auszugsweise die Hilfstafel bei gegebenem  $\log a$ .

[10] Anhang.

**Trigonometrische Höhenmessung.**

*Horizontkorrektur*  $\frac{1-k}{2r} a^2$  ,  $\log r = 6.80489$  ,  $k = 0,13$

als Funktion der Entfernung  $a$ .

$a$	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	Diff.
0	0,000	0,001	0,003	0,006	0,011	0,017	0,025	0,033	0,044	0,055	13
1 000	0,068	0,082	0,098	0,115	0,134	0,153	0,175	0,197	0,221	0,246	27
2 000	0,273	0,30	0,33	0,36	0,39	0,43	0,46	0,50	0,53	0,57	4
3 000	0,61	0,66	0,70	0,74	0,79	0,84	0,88	0,93	0,98	1,04	5
4 000	1,09	1,15	1,20	1,26	1,32	1,38	1,44	1,51	1,57	1,64	6
5 000	1,70	1,77	1,84	1,91	1,99	2,06	2,14	2,21	2,29	2,37	8
6 000	2,45	2,54	2,62	2,71	2,79	2,88	2,97	3,06	3,15	3,25	10
7 000	3,34	3,44	3,53	3,63	3,73	3,83	3,94	4,04	4,15	4,25	11
8 000	4,36	4,47	4,58	4,70	4,81	4,93	5,04	5,16	5,28	5,40	12
9 000	5,52	5,65	5,77	5,90	6,02	6,15	6,28	6,41	6,55	6,68	13
10 000	6,82	6,95	7,09	7,23	7,37	7,52	7,66	7,80	7,95	8,10	15

**Abb. 21.1:** Hilfstafel für Korrekturterm bei gegebener Distanz

**Trigonometrische Höhenmessung.**

Horizontkorrektion  $\frac{1-k}{2r} a^2$  ,  $\log r = 6.80489$  ,  $k = 0,13$

als Funktion von  $\log a$ .

$\log a$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
2.0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	
2.9	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,07	0
3.0	0,07	0,07	0,07	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,10	0,10	1
3.1	0,11	0,11	0,12	0,12	0,13	0,14	0,14	0,15	0,16	0,16	1
3.2	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	1
3.3	0,27	0,28	0,30	0,31	0,33	0,34	0,36	0,37	0,39	0,41	2
3.4	0,43	0,45	0,47	0,49	0,52	0,54	0,57	0,59	0,62	0,65	3
3.5	0,68	0,71	0,75	0,78	0,82	0,86	0,90	0,94	0,98	1,03	5
3.6	1,08	1,13	1,18	1,24	1,30	1,36	1,42	1,49	1,56	1,64	7
3.7	1,71	1,79	1,88	1,97	2,06	2,16	2,26	2,36	2,47	2,59	12
3.8	2,71	2,84	2,98	3,12	3,26	3,42	3,58	3,75	3,92	4,11	19

**Abb. 21.2:** Hilfstafel für Korrekturterm bei gegebenem Logarithmus der Distanz

Aus Tafel 1 (Abbildung 21.1) erhält man den Wert  $2,12m$ , während aus der Tafel 2 (Abbildung 21.2) der Wert  $2,13m$  zu entnehmen ist. Damit lässt sich der endgültige Höhenunterschied berechnen.

$$h = 140,13m + 2,12m + 0,27m - 2,11m = 140,41m$$

Auch dazu wurde von Prof. W. Jordan ein Rechenformular mit logarithmischem Rechenschema entwickelt, welches in der Abbildung 22.1 dargestellt ist.

**Trigonometrische Höhenmessung**

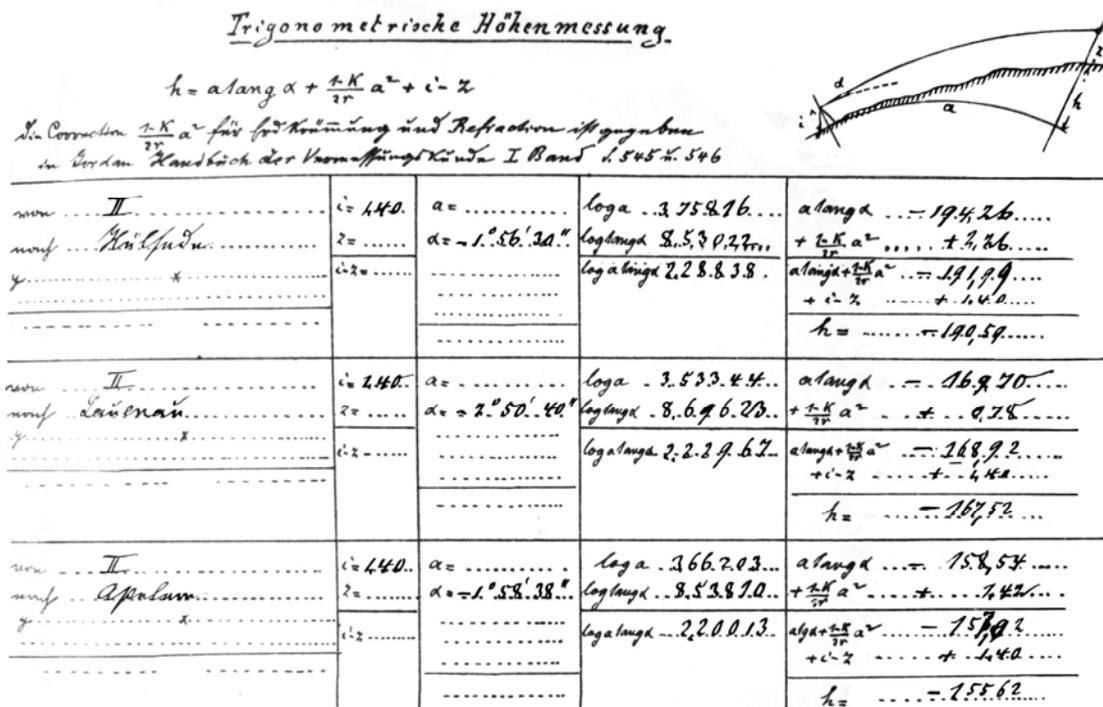
$$h = a \cdot \tan \alpha + \frac{1-k}{2r} a^2 + i - z$$

Die Correction  $\frac{1-k}{2r} a^2$  für Erdkrümmung und Refraction ist gegeben in Jordan Handbuch der Vermessungskunde I. Band, S, 545 u. 546

von _____	i = _____	a = _____	log a = _____	a tang α _____
nach _____	z = _____	α = _____	log tang α = _____	+ $\frac{1-k}{2r} a^2$ _____
y _____ x _____	i-z = _____		log a tang α = _____	a tang α + $\frac{1-k}{2r} a^2$ _____
				+ i-z = _____
				<b>h = _____</b>

**Abb. 22.1:** Rechenformular zur trigonometrischen Höhenmessung

Das Originalformular ist in der Abbildung 22.2 zu finden.

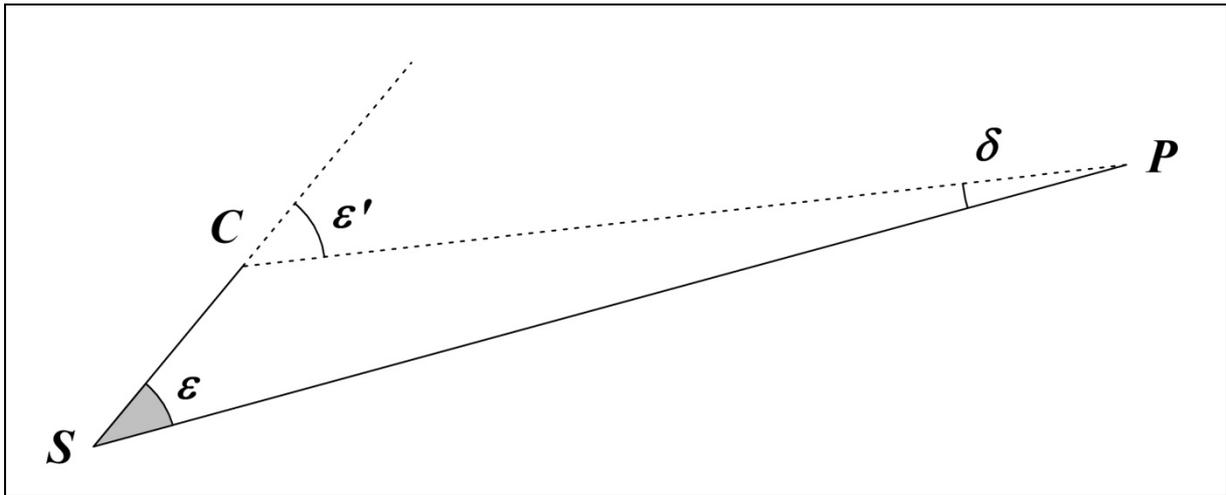


**Abb. 22.2:** Originalformular zur trigonometrischen Höhenmessung

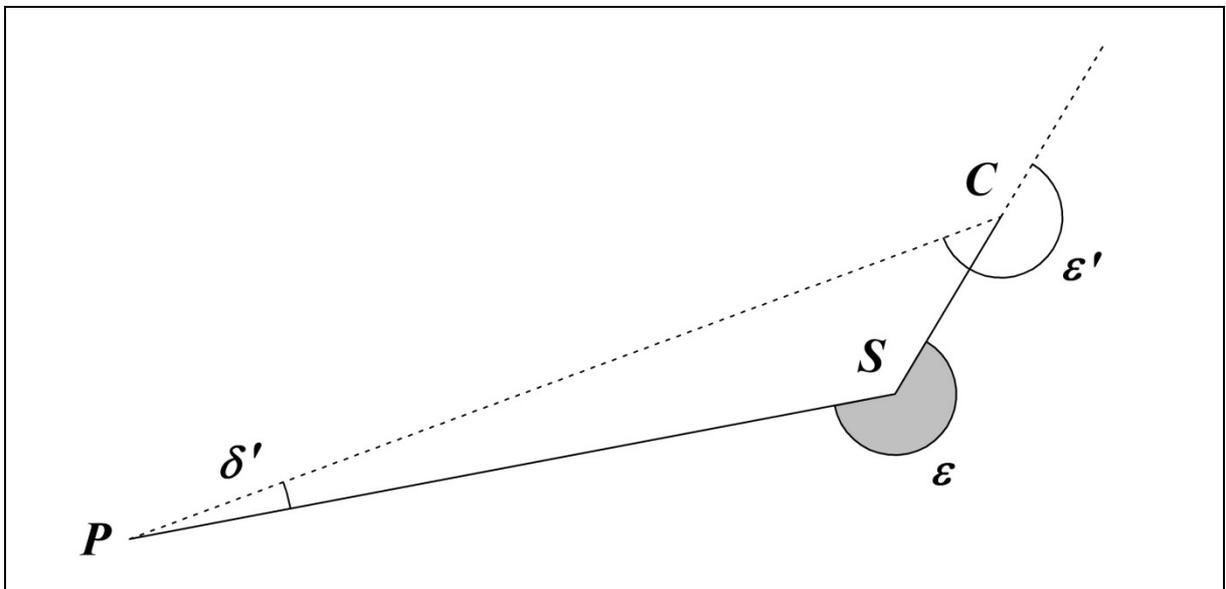
Die zugehörigen Messungen wurden im Rahmen einer studentischen Übung im Raum Bad Nenndorf im Jahre 1885 gewonnen.

### Aufgabe 6

Es kommt recht häufig vor, dass das Aufstellen des Theodolits auf einem trigonometrischen Punkt nicht zentrisch möglich ist, sondern auf einem Exzentrum vorgenommen werden muss. Die auf diesem Exzentrum gemessenen Richtungen sind dann auf das Zentrum zu zentrieren. In den Abbildungen 23.1 und 23.2 sind die Möglichkeiten einer Standpunktzentrierung je nach Größe des Zentrierungswinkels  $\varepsilon$  aufgeführt.



**Abb. 23.1:** Standpunktzentrierung mit  $\varepsilon < 180^\circ$



**Abb. 23.2:** Standpunktzentrierung mit  $\varepsilon > 180^\circ$

Nach Abb. 23.1 ist

$$\begin{aligned}\varepsilon' &= \varepsilon + \delta \\ \sin \delta &= \frac{e}{s} \sin \varepsilon\end{aligned}\tag{17}$$

Nach Abb. 23.2 ist:

$$\begin{aligned}(360^\circ - \varepsilon') &= (360^\circ - \varepsilon) + \delta' \\ \sin \delta' &= \frac{e}{s} \sin(360^\circ - \varepsilon')\end{aligned}\tag{18}$$

Unter der Annahme, dass  $e$  im Verhältnis zu  $s$  sehr klein ist, wird

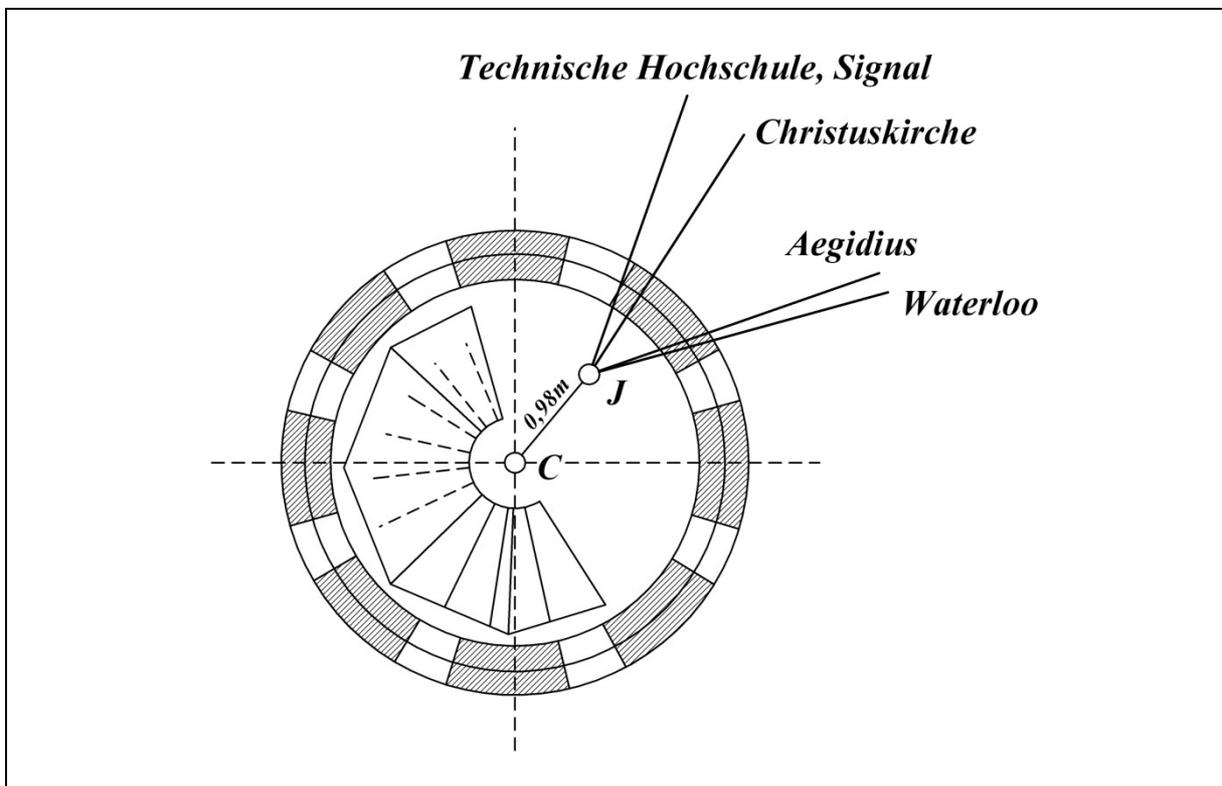
$$\delta = \frac{e}{s} \rho \cdot \sin \varepsilon$$

$$\delta' = -\frac{e}{s} \rho \cdot \sin \varepsilon'$$
(19)

und damit in beiden Fällen als Resultat

$$\varepsilon' - \varepsilon = \frac{e}{s} \rho \cdot \sin \varepsilon$$
(20)

Als Beispiel sollen die Messungen von Prof. W. Jordan im Triangulierungsnetz von Hannover auf dem Wasserturm Linden dienen. In der Mitte des Turmes befindet sich eine Flaggenstange, welche von den umgebenden Punkten als Zielpunkt dient. Wird dann vom Wasserturm gemessen, muss der Theodolit exzentrisch zur Flaggenstange aufgestellt werden (Abbildung 24).



**Abb. 24:** Beispiel zur exzentrischen Richtungsmessung (Wasserturm Linden)

Das logarithmische Rechenschema ist dann

<i>C</i> <i>Centrum</i>	<i>P<sub>1</sub></i> <i>Technische Hochschule Signal</i>	<i>P<sub>2</sub></i> <i>Christuskirche</i>	<i>P<sub>3</sub></i> <i>Aegidius</i>	<i>P<sub>4</sub></i> <i>Waterloo</i>
223°40'00"	22°40'12,5"	35°36'21,2"	73°28'07,5"	75°30'13,7"
	223°40'00"	223°40'00"	223°40'00"	223°40'00"
$\varepsilon$	159°00'12"	171°56'21"	209°48'07"	211°50'14"
$s$	2355m	2499m	2392m	1554m
$\log \rho = 5.31443$				
$\log e = 9.99123$	5.30566	5.30566	5.30566	5.30566
$\log \sin \varepsilon$	9.55426	9.14682	9.69636n	9.72223n
$\text{cpl. } \log s$	6.62801	6.60223	6.62124	6.80855
$\log \delta$	1.48793	1.05471	1.62326n	1.83644n
$\delta$	+30,8"	+11,3"	-42,0"	-68,6"
				= -1'08,6"
<i>centrierte Richtungen</i>	22°40'43,3"	35°36'32,5"	73°27'25,5"	75°29'05,1"

Mit diesen Beispielen soll das Vorkommen des logarithmischen Rechnens auf dem Gebiet der niederen Geodäsie exemplarisch abgeschlossen sein. Bevor nun einige Beispiele der höheren Geodäsie folgen, soll ein wenig der Bereich der barometrischen Höhenmessung beleuchtet werden.

#### **4. Barometrische Höhenmessung**

##### **Aufgabe 7**

Basis der barometrischen Höhenmessung ist die Ausnutzung der physikalischen Situation, dass mit zunehmender Höhe der Luftdruck abnimmt, somit an verschiedenen Positionen in der Atmosphäre unterschiedliche Luftdrücke gemessen werden können. Damit lassen sich überschlüssig Höhenunterschiede zwischen Messpunkten bestimmen. Unter Vernachlässigung der Wiedergabe der theoretischen Ableitungen und Grundlagen wird hier als Schlussformel die barometrische Höhenformel nach [4] angegeben.

$$h = K \cdot \log \frac{P}{p} (1 + \varepsilon \cdot t) \left( 1 + 0,377 \frac{e}{(p)} \right) (1 + \beta \cdot \cos 2\varphi) \left( 1 + \frac{2H}{r} \right)$$

mit

$$K = \frac{0,76}{M} \frac{13,59593}{0,00129277} \frac{1}{1,00021} = 18400 = \text{barometrische Konstante}$$

$0,76m$  = Normalhöhe einer Quecksilbersäule

$M = 0,4342945$  = logarithmischer Modul

$13,59593$  = Dichte des Quecksilbers

$0,00129277$  = Dichte der Luft unter Normaldruck

$1,00021$  = Reduktionsfaktor für Kohlensäure

$h$  = zu messende Höhe

$P$  = an der unteren Station gemessener Luftdruck

$p$  = an der oberen Station gemessener Luftdruck

$\varepsilon = 0,003665$  = Ausdehnungskoeffizient der Luft für  $1^\circ[C]$

$t$  = mittlere Lufttemperatur in  $[C^\circ]$

$$(p) = \text{der mittlere Luftdruck} = \frac{P + p}{2}$$

$0,377 = 1 - d$  = Dichte des Wasserdampfes

$d = 0,623$

$\beta = 0,00265$  = Schwerekoeffizient nach Helmert

$\varphi$  = mittlere geographische Breite beider Stationen

$H$  = mittlere Höhe beider Stationen

$r = 6370000m$  = Erdhalbmesser

(21)

Zur Veranschaulichung wird ein Zahlenbeispiel, welches auch in [4] zu finden ist, wiedergegeben. Es werden die meteorologischen Stationen Karlsruhe und Höchenschwand betrachtet. Grundlage sind die 5-jährigen Mittelwerte von 1871 bis 1875.

	<b>Quecksilber- Barometerstand</b>	<b>Luftwärme</b>	<b>Feuchtigkeit</b>
<i>Untere Station Karlsruhe</i>	751,79mm	+9,5°C	+7,5mm
<i>Obere Station Höchenschwand</i>	676,13mm	+5,9°C	+6,3mm
<b>Mittelwerte</b>	<b>B=713,96mm</b>	<b>t=+7,7°C</b>	<b>e=6,9mm</b>

Zur Anbringung der Schwerekorrekturen und –reduktionen sind Näherungswerte für die Meereshöhe und die geographische Breite von Interesse.

Karlsruhe	$H_1 =$	120m	$\varphi_1 =$	49°01'
Höchenschwand	$H_2 =$	1000m	$\varphi_2 =$	47°44'
<b>Mittel</b>	<b>H =</b>	<b>560m</b>	<b><math>\varphi =</math></b>	<b>48°22'</b>

Für die entsprechenden Korrekturen hat Prof. W. Jordan in [4] eine entsprechende Hilfstafel bereitgestellt. Für dieses Beispiel gibt Abbildung 25.1 daraus einen Auszug wieder.

<b>Schwere-Reduktion des Quecksilber-Barometers.</b>												
$B_0^{45} - B = -\beta B \cos 2\varphi - 2 \frac{BH}{r}$ , mit $\beta = 0,00265$ nach <i>Helmert</i> .												
$r = 6\,370\,000^m$												
Breite $\varphi$	Barometerstand $B^{mm}$ (und Höhe $H^m$ über dem Meer)											
	760 <sup>mm</sup> (0 <sup>m</sup> )	750 <sup>mm</sup> (115 <sup>m</sup> )	740 <sup>mm</sup> (230 <sup>m</sup> )	730 <sup>mm</sup> (345 <sup>m</sup> )	720 <sup>mm</sup> (460 <sup>m</sup> )	710 <sup>mm</sup> (575 <sup>m</sup> )	700 <sup>mm</sup> (690 <sup>m</sup> )	690 <sup>mm</sup> (805 <sup>m</sup> )	680 <sup>mm</sup> (920 <sup>m</sup> )	670 <sup>mm</sup> (1035 <sup>m</sup> )	660 <sup>mm</sup> (1150 <sup>m</sup> )	
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
45°	-0,00	-0,03	-0,05	-0,08	-0,10	-0,13	-0,15	-0,17	-0,20	-0,22	-0,24	
46	+0,07	+0,04	+0,02	-0,01	-0,04	-0,06	-0,09	-0,11	-0,13	-0,16	-0,18	
47	+0,14	+0,11	+0,08	+0,06	+0,03	0,00	-0,02	-0,05	-0,07	-0,09	-0,12	
48	+0,21	+0,18	+0,15	+0,12	+0,10	+0,07	+0,04	+0,02	-0,01	-0,03	-0,06	
49	+0,28	+0,25	+0,22	+0,19	+0,16	+0,14	+0,11	+0,08	+0,05	+0,03	+0,00	

**Abb. 25.1:** Hilfstafel zur Schwerereduktion

Somit wird

$$\begin{aligned} \text{Karlsruhe} & \quad 751,79 + 0,28 - 0,03 = 752,04 \text{ mm} \\ \text{Höchenschwand} & \quad 676,13 + 0,17 - 0,21 = 676,09 \text{ mm} \end{aligned}$$

und es können die Werte zur Einführung in die barometrische Höhenformel bereitgestellt werden.

$$\begin{aligned} P &= 752,04 \text{ mm} \\ p &= 676,09 \text{ mm} \quad \text{Mittelwert} = 714 \text{ mm} \\ e &= 6,9 \text{ mm} \\ t &= 7,7^\circ \text{C} \\ \varphi &= 48^\circ 22' \\ H &= 560 \text{ m} \end{aligned}$$

Das logarithmische Rechenschema ist dann mit Nutzung der logarithmischen Tafeln in den Abbildungen 25.2, 25.3 und 25.4.

$$\begin{array}{l} \log 752,04 = 2.876241 \\ \log 676,09 = 2.830005 \\ \hline \text{Differenz} \quad 0.046236 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log 0.046236 \quad 8.66498 \\ \log K (K=18400) \quad 4.26482 \\ \text{mit } t=7,7^\circ\text{C (siehe Abb. 25.2)} \quad 0.01209 \\ \text{mit } e=6,9 \text{ und } B=714 \text{ (siehe Abb. 25.3)} \quad 0.00158 \\ \text{mit } \varphi=48,37^\circ \text{ (siehe Abb. 25.4)} \quad 9.99987 \\ \text{mit } H=560 \text{ (siehe Abb. 25.4)} \quad 0.00008 \\ \hline \log h \quad 2.94342 \\ \hline \mathbf{h = 877,85m} \end{array}$$

Ist z. B. für die untere Station eine Höhe gegeben, so kann dann für die obere Station die Höhe berechnet werden.

$$\begin{array}{r} \text{Karlsruhe (z. B. NN-Höhe)} \quad 123,00m \\ \hline h \quad 877,85m \\ \hline \text{Höchenschwand (NN-Höhe)} \quad 1000,85m \end{array}$$

<b>Ausdehnung der Luft durch die Wärme.</b>											
$\log (1 + 0,003665 t).$											
Logarithmische Korrektur zur barometrischen Höhenmessung.											
<i>t</i>	,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	Diff. für 0,1°
5°	0.00789	0.00805	0.00820	0.00835	0.00851	0.00867	0.00882	0.00898	0.00913	0.00929	16
6	00945	00960	00976	00991	01007	01022	01038	01053	01069	01085	15
7	01100	01116	01131	01147	01162	01178	01193	01209	01224	01240	15
8	01255	01270	01286	01301	01317	01332	01348	01363	01379	01394	15
9	01409	01425	01440	01456	01471	01486	01502	01517	01532	01548	15

**Abb. 25.2:** Hilfstafel zur Temperaturkorrektur

### Luftfeuchtigkeit.

$$\log \left( 1 + 0,377 \frac{e}{B} \right)$$

Logarithmische Korrektur zur barometrischen Höhenmessung.

Barom. <i>B</i>	Dunstdruck <i>e</i>										Diff. für $\Delta e$
	3 <sup>mm</sup>	4 <sup>mm</sup>	5 <sup>mm</sup>	6 <sup>mm</sup>	7 <sup>mm</sup>	8 <sup>mm</sup>	9 <sup>mm</sup>	10 <sup>mm</sup>	11 <sup>mm</sup>	12 <sup>mm</sup>	
mm											+
680	0.00072	0.00096	0.00120	0.00144	0.00168	0.00192	0.00216	0.00240	0.00264	0.00288	24
690	00071	00095	00118	00142	00166	00190	00213	00237	00260	00284	24
700	00070	00093	00116	00140	00163	00186	00210	00233	00257	00280	23
710	00069	00092	00115	00138	00161	00184	00207	00230	00253	00276	23
720	00068	00091	00113	00136	00159	00182	00204	00227	00249	00272	23

**Abb. 25.3:** Hilfstafel zur Feuchtigkeitskorrektur

### Schwere-Reduktion.

$\log (1 + \beta \cos 2 \varphi)$  mit  $\beta = 0,00265$  nach *Helmert*.

$\varphi$	<i>log</i>	<i>d</i>	$\varphi$	<i>log</i>	<i>d</i>	$\varphi$	<i>log</i>	<i>d</i>
15°	0.000 996	21	45°	0.000 000	40	75°	9.999 002	19
16	0.000 975	22	46	9.999 960	40	76	9.998 983	19
17	0.000 953	23	47	9.999 920	40	77	9.998 964	17
18	0.000 930	24	48	9.999 880	40	78	9.998 947	16
19	0.000 906	25	49	9.999 840	40	79	9.998 931	14

$$\log \left( 1 + \frac{2H}{r} \right) \text{ mit } r = 6\,370\,000^m$$

<i>H</i>	<i>log</i>	<i>d</i>	<i>H</i>	<i>log</i>	<i>d</i>	<i>H</i>	<i>log</i>	<i>d</i>
0 <sup>m</sup>	0.000 000		500 <sup>m</sup>	0.000 068	14	1000 <sup>m</sup>	0.000 136	
100	0.000 014	14	600	0.000 082	14	1100	0.000 150	14
200	0.000 027	13	700	0.000 095	13	1200	0.000 164	14
300	0.000 041	14	800	0.000 109	14	1300	0.000 177	13
400	0.000 055	14	900	0.000 123	14	1400	0.000 191	14
500	0.000 068	13	1000	0.000 136	13	1500	0.000 205	14

**Abb. 25.4:** Hilfstafel zur Schwere-Reduktion

Dieses Kapitel zeigt, wie hilfreich die Nutzung logarithmischer Berechnungen und Tafeln für die geodätische Praxis sein konnte.

## 5. Logarithmische Anwendungen und Berechnungen in der höheren Geodäsie

Die Aufgabe der höheren Geodäsie besteht in der Bestimmung von Erdgestalt und Schwerkraft. Wie bereits in der Einleitung ausgeführt, wird hier die Erde in erster Näherung als Kugel, dann als Rotationsellipsoid (Sphäroid) und anschließend als Geoid betrachtet. Desweiteren ist es notwendig entsprechende Ellipsoidparameter und Berechnungsalgorithmen für die Zwecke der Landesvermessung bereitzustellen.

Die historische Entwicklung zur Beschreibung und der Kenntnis von der mathematischen Erdoberfläche sei an dieser Stelle in Form der einer Tabelle 2 mit wenigen Stichworten zu den jeweiligen Arbeiten der Autoren kurz wiedergegeben.

<i><b>Autor</b></i>	<i><b>Zeitpunkt</b></i>	<i><b>Arbeiten/Entdeckungen</b></i>
<i>Pythagoras</i>	<i>6. Jhd. v. Chr.</i>	<i>Erste Annahme über kugelförmige Himmelskörper</i>
<i>Aristoteles</i>	<i>340 v. Chr.</i>	<i>Schrift: Über den Himmel, Erdumfang bestimmt</i>
<i>Dikaiarchos</i>	<i>309 v. Chr.</i>	<i>Erdumfang neu bestimmt</i>
<i>Aristarch</i>	<i>270 v. Chr.</i>	<i>Heliozentrisches Weltbild</i>
<i>Eratosthenes</i>	<i>220 v. Chr.</i>	<i>Erste wissenschaftliche Messung des Erdumfangs</i>
<i>Copernicus</i>	<i>15./16. Jhd.</i>	<i>Aufstellung des Planetensystems</i>
<i>Galilei</i>	<i>16./17. Jhd.</i>	<i>Nachweis des heliozentrischen Weltbilds</i>
<i>Kepler</i>	<i>16./17. Jhd.</i>	<i>Schaffung der Planetengesetze</i>
<i>Huygens</i>	<i>17. Jhd.</i>	<i>Physikalische Pendel, Zentralbewegung, Schwerkraft</i>
<i>Newton</i>	<i>17./18. Jhd.</i>	<i>Gravitationsgesetz, homogenes Ellipsoid</i>
<i>Snellius</i>	<i>1619</i>	<i>Einführung der Triangulation für Erdvermessungen</i>
<i>Picard/Azout</i>	<i>1669</i>	<i>Breitengradmessung</i>
<i>Cassini</i>	<i>17./18. Jhd.</i>	<i>Längengradmessungen, Triangulation</i>
<i>Clairaut</i>	<i>1743</i>	<i>Berechnung der Abplattung durch Schwerkraft</i>
<i>Bradley</i>	<i>1748</i>	<i>Nutation</i>
<i>d'Alembert</i>	<i>1749</i>	<i>Untersuchung der Präzession</i>
<i>Laplace</i>	<i>18./19. Jhd.</i>	<i>Darstellung des Weltsystems, Nebularhypothese</i>
<i>Bessel</i>	<i>18./19. Jhd.</i>	<i>Ableitung von Ellipsoidparametern (1841)</i>

**Tab. 2:** Historie zur Entwicklung einer mathematischen Erdoberfläche

Am Beispiel der von Friedrich Wilhelm Bessel (1784 - 1846) aus zahlreichen Messungen abgeleiteten Parameter für ein Erdellipsoid soll die Bedeutung der Logarithmen als Rechentechnik exemplarisch wiedergegeben werden. Die Aufführung aller auf einer Kugel oder einem Ellipsoid durchzuführenden Rechnungen würde an dieser Stelle den Rahmen deutlich sprengen. Es sei dabei auf die verwendete Literatur verwiesen.

In der Abbildung 26.1 ist das Rotationsellipsoid mit seinen beiden Halbachsen  $a$  und  $b$  dargestellt. Die große Halbachse  $a$  befindet sich in der Äquatorebene, die kleine Halbachse  $b$  in der Rotationsachse.

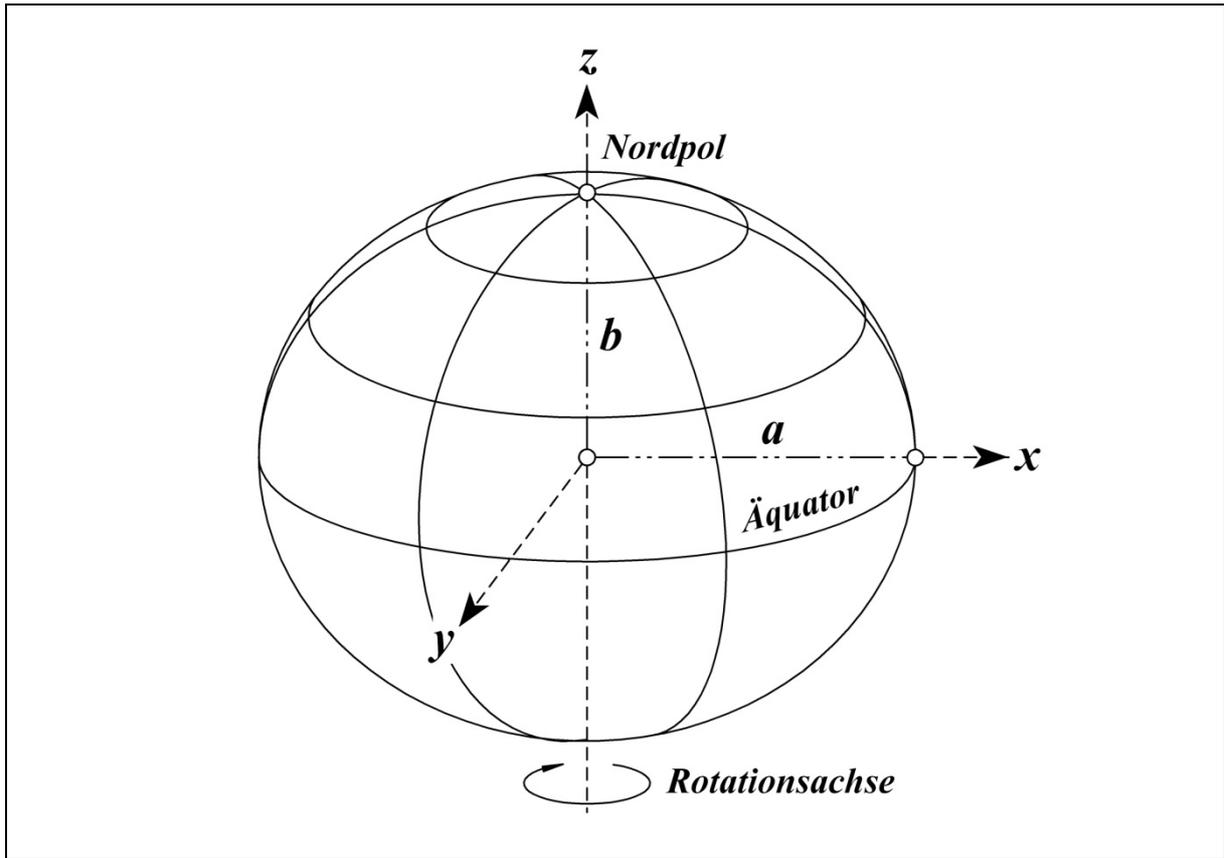


Abb. 26.1: Das Rotationsellipsoid

In der Tabelle 3 sind einige Parameter von Rotationsellipsoiden der Erde chronologisch mit einigen Zusatzinformationen aufgeführt. Neben der historischen Entwicklung zur Bestimmung der Erdparameter wird auch deutlich, dass für bestimmte Gebiete, diese Parameter für die Landesvermessung angepasst wurden. Das interessierende Bessel-Ellipsoid ist durch Fettschrift herausgehoben.

<b>Ellipsoid Autor</b>	<b>Jahr</b>	<b>Halbachse a in Meter</b>	<b>Halbachse b in Meter</b>	<b>Abplattung (1/f)</b>	<b>Gebiet, Anmerkungen</b>
<i>Normalsphäre</i>		6370997,000	6370997,000		<i>Kugel</i>
<i>Maupertuis</i>	1738	6397300,000	6363806,283	191,0000	<i>Frankreich</i>
<i>Delambre</i>	1810	6376985,000	6356323,871	308,6465	<i>Frankreich</i>
<i>Plessis</i>	1817	6376523,000	6355862,933	308,6400	<i>Frankreich</i>
<i>Schmidt</i>	1828	6376804,370	635690,522	302,0200	<i>Schweiz</i>
<i>Everest</i>	1830	6377309,613	6356108,570	300,8017	<i>Pakistan</i>
<i>Everest</i>	1830	6377309,613	6356109,571	300,8156	<i>Pakistan</i>
<i>Airy</i>	1830	6377563,396	6356256,909	299,3250	<i>Grossbritannien</i>
<i>Everest</i>	1830	6377299,365	6356098,359	300,8017	
<i>Everest</i>	1830	6377276,345	6356075,413	300,8017	<i>Indien</i>
<i>Everest</i>	1830	6377298,556	6356097,550	300,8017	<i>Malaysia</i>
<b>Bessel</b>	<b>1841</b>	<b>6377397,155</b>	<b>6356078,963</b>	<b>299,1528</b>	<b>Eurasien und Mitteleuropa</b>
<i>Bessel Namibia</i>	1841	6377483,865	6356165,383	299,1528	<i>Namibia</i>
<i>Airy mod.</i>	1865	6377340,189	6356034,448	299,325	<i>Irland</i>
<i>Clarke</i>	1866	6378206,400	6356583,800	294,9787	<i>Nordamerika</i>
<i>Clarke</i>	1878	6378190,000	6356456,000	292,4660	<i>Nordamerika</i>
<i>Clarke</i>	1880	6378249,145	6356514,870	293,4650	<i>Frankreich, Afrika</i>
<i>Helmert</i>	1906	6378200,000	6356818,170	298,3000	
<i>Hough</i>	1906	6378270,000	6356818,170	298,3000	
<i>Hayford</i>	1910	6378388,000	6356911,946	297,0000	<i>USA</i>
<i>Hayford</i>	1924	6378388,000	6356912,000	297,0000	<i>International, Europa</i>
<i>International</i>	1924	6378388,000	6356911,946	297,0000	
<i>NAD27</i>	1927	6378206,400	6356583,800	294,9787	<i>Nordamerika</i>
<i>Krassovsky</i>	1940	6378245,000	6356863,019	298,3000	<i>Russland</i>
<i>Everest</i>	1948	6377304,063	6356103,039	300,8017	
<i>Everest</i>	1956	6377301,243	6356100,228	300,8017	
<i>Everest</i>	1956	6377301,243	6356100,228	300,8017	<i>Indien</i>
<i>Fisher mod.</i>	1960	6378155,000	6356773,320	298,3000	
<i>WGS60</i>	1960	6378165,000	6356783,287	298,3000	<i>Global</i>
<i>Hough</i>	1960	6378270,000	6356794,343	297,0000	
<i>Everest mod.</i>	1964	6377304,063	6356103,039	300,8017	<i>West Malaysia, Singapur</i>
<i>Australian Nat.</i>	1966	6378160,000	6356774,719	298,2500	<i>Australien</i>
<i>WGS66</i>	1966	6378145,000	6356759,769	298,2500	<i>USA</i>
<i>Everest Def.</i>	1967	6377298,556	6356097,550	300,8017	<i>Ost Malaysia, Brunei</i>
<i>New International</i>	1967	6378157,500	6356772,200	298,2496	
<i>GRS67</i>	1967	6378160,000	6356774,516	298,2472	<i>Global</i>
<i>Fisher</i>	1968	6378150,000	6356768,337	298,3000	
<i>SAD69</i>	1969	6378160,000	6356774,719	298,2500	<i>Südamerika</i>
<i>Everest</i>	1969	6377295,664	6356094,668	300,8017	<i>Malaysia, Singapur</i>
<i>WGS72</i>	1972	6378135,000	6356750,520	298,2600	<i>USA</i>
<i>Indonesien</i>	1974	6378160,000	6356774,504	298,2470	
<i>ATS77</i>	1977	6378135,000	6356750,305	298,2570	
<i>GRS80</i>	1980	6378137,000	6356752,314	298,2572	<i>Global</i>
<i>WGS84</i>	1984	6378137,000	6356752,314	298,2572	<i>Global, GPS</i>
<i>SGS85</i>	1985	6378136,000	6356751,302	298,2570	
<i>IERS</i>	1989	6378136,000	6356751,302	298,2570	<i>Global</i>
<i>IERS</i>	2003	6378136,600	6356751,900	298,2564	<i>Global</i>

**Tab. 3:** Parameter von Rotationsellipsoiden (Auswahl)

Bevor die Parameter logarithmisch präsentiert werden, gilt es einige Zusammenhänge bzw. Relationen wiederzugeben.

Ausgehend von

$a =$  große Halbachse in der Äquatorebene

$b =$  kleine Halbachse in der Rotationsachse

sind

$$f = \frac{a-b}{a} \text{ die Abplattung}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \text{ die 1. numerische Exzentrizität}$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \text{ die 2. numerische Exzentrizität}$$

$$n = \frac{a-b}{a+b} \text{ die 1. Hilfsgröße}$$

$$m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \text{ die 2. Hilfsgröße}$$

(22)

Zwischen diesen fünf Größen lassen sich durch Auflösung nach  $b$  und Gleichsetzen verschiedene Relationen herstellen. Die sich dabei ergebenden Reihen konvergieren wegen  $n, m, f$  und  $e^2 < 1$  für das Ellipsoid sehr schnell.

$$\begin{aligned}
b &= a(1-f) = a \frac{1-n}{1+n} \\
b^2 &= a^2(1-e^2) \\
e^2 &= 2f - f^2 \\
f &= 1 - \sqrt{1-e^2} = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16} + \frac{5 \cdot e^8}{128} + \dots \\
f &= \frac{2n}{1+n} = 2n - 2n^2 + 2n^3 - 2n^4 + \dots \\
n &= \frac{f}{2-f} = \left(\frac{f}{2}\right) + \left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^3 + \left(\frac{f}{2}\right)^4 \\
e^2 &= \frac{4}{(1+n)^2} = 4n - 8n^2 + 12n^3 - 16n^4 + \dots \\
n &= \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{1 + \sqrt{1-e^2}} = \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5e^6}{64} + \frac{7e^8}{128} + \dots \\
\delta &= \frac{e^2}{1-e^2} = e^2 + e^4 + e^6 + e^8 + \dots \\
m &= \frac{e^2}{2-e^2} = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{4} + \frac{e^6}{8} + \frac{e^8}{16} + \dots \\
m &= \frac{2n}{1+n^2} = 2n - 2n^3 + 2n^5 - \dots \\
m &= f + \frac{f^2}{2} - \frac{f^4}{4} - \frac{f^5}{4} - \dots \\
1-e^2 &= \frac{1-m}{1+m} = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 = (1-f)^2 = \frac{1}{1+\delta}
\end{aligned} \tag{23}$$

Bessel hat seine ermittelten Erdparameterwerte für die beiden Halbachsen in Toisen angegeben, einem französischen Längenmaß. 1 Toise entsprach exakt 1,9490363098246 m und wurde in Frankreich aufgrund der Meridianvermessungen etwa 1735 eingeführt und 1766 am Grand Chatelet durch zwei Markierungen im Stein sogar materiell realisiert. Zusätzlich gab Bessel den Logarithmus der beiden Halbachsen an.

<i>Parameter</i>	<i>Werte</i>	<i>Logarithmus</i>
$a =$	3272077,14	6.5148235337
$b =$	3261139,33	6.5133693539
$f =$	1:299,1528	
$n =$	0,001674184767	7.2238033861-10

Der Übergang zum Metermaß wurde mit dem Verwandlungslogarithmus

$$0.28981992994$$

vorgenommen, so dass die beiden Halbachsen abschließend definiert sind.

<i>Parameter</i>	<i>Werte</i>	<i>Logarithmus</i>
$a =$	6377397,15500	6.8046434637
$b =$	6356078,96325	6.8031892839

Helmert [1] führt dazu aus, dass die an dieser Stelle im Hinblick auf die wirkliche Genauigkeit sehr weit gehende Schärfe gewollt ist, denn die Ellipsoidparameter treten hier als Fundamentalzahlen auf und sind allen weiteren Berechnungen zugrunde zu legen. Die weiteren Größen ergeben sich dann nach [5] zu.

<i>Parameter/Größe</i>	<i>Wert</i>	<i>Logarithmus</i>
$e^2 =$	0,006674372096	7.8244104149-10
$f =$	0,003342773114	7.5241069005-10
$m =$	0,003348360149	7.5248321645-10
$\delta =$	0,006719218662	7.8273187745-10
$n^2 =$	0,00000280289463	
$n^3 =$	0,00000000469256	
$n^4 =$	0,00000000000786	
$e^4 =$	0,000044547243	
$e^6 =$	0,000000297325	
$e^8 =$	0,000000001984	
$e^{10} =$	0,000000000013	
$f^2 =$	0,000011174132	
$f^3 =$	0,000000037352	
$f^4 =$	0,000000000125	
$m^2 =$	0,000011211516	
$m^3 =$	0,000000037540	
$m^4 =$	0,000000000126	
$2(1-f) =$		9.99709164046-10
$1+m =$		0.00145174521
$1-m =$		9.99854338566-10
$1+n =$		0.00072648124
$1-n =$		9.99927230147-10

Diese Zahlen wurden einerseits mit Anwendung des *Thesaurus logarithmorum completus* von G. Vega (*Leipzig 1794*) berechnet, andererseits zur Kontrolle durch direkte abgekürzte Multiplikation und Division und mit teilweiser Benutzung der Rechenmaschine von Thomas. Die in der Zusammenstellung aufgeführten letzten 11-ziffrigen Logarithmen wurden direkt durch Reihenentwicklung gefunden. Diese Zahlen bildeten die Grundlage für alle weiteren Berechnungen auf dem Ellipsoid im Rahmen der höheren Geodäsie.

Dies führt im nächsten Schritt zur Definition von Koordinaten auf dem Ellipsoid. Die auf die Hauptachsen des Rotationsellipsoids bezogene Mittelpunktsleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (24)$$

wird zur Festlegung von Punkten auf der Ellipsoidoberfläche geodätisch selten benutzt. Statt dessen wird Parameterdarstellungen der Vorzug gegeben. Die ältesten und am häufigsten verwendeten Parameter sind die geographische Länge und die

geographische Breite (oft auch als  $\lambda$  und  $\varphi$  bekannt), die beide als Winkel definiert sind, wie in der Abbildung 26.2 dargestellt.

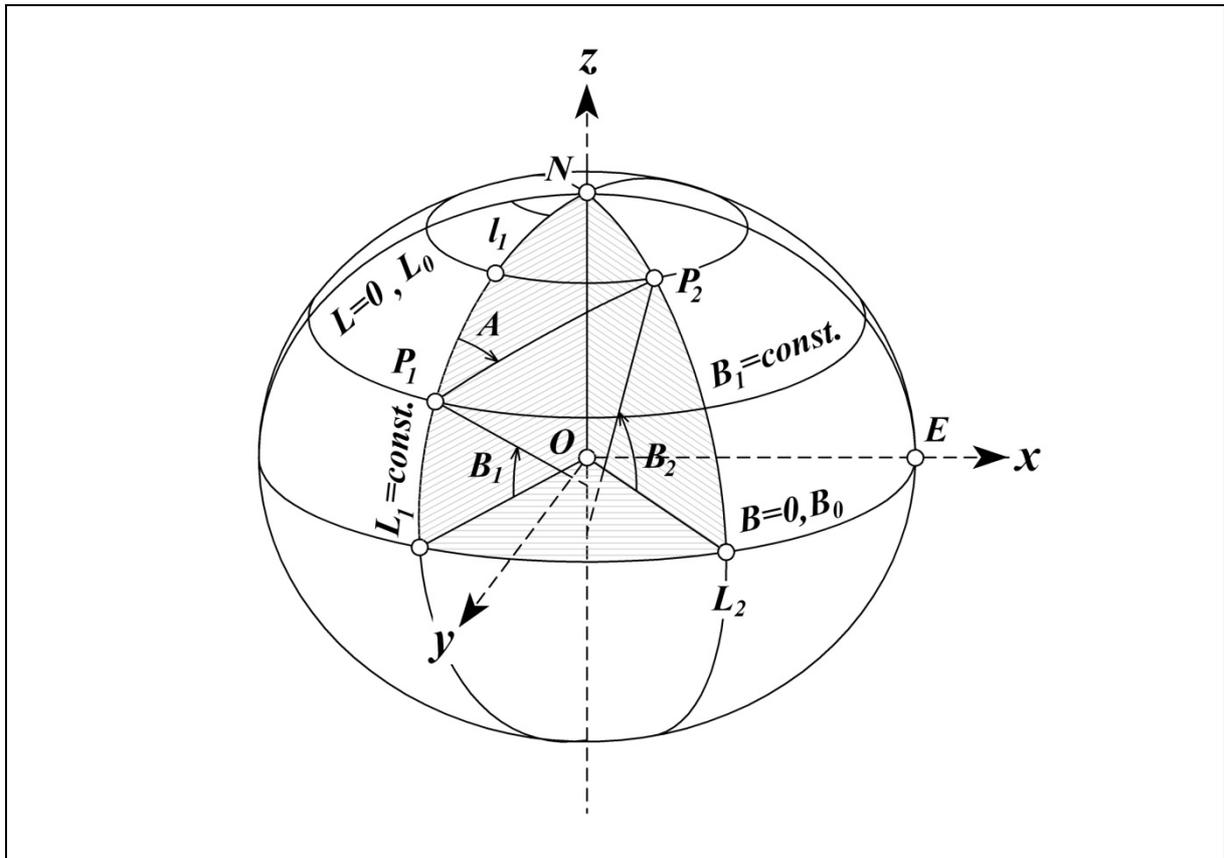


Abb. 26.2: Geographische Koordinaten auf dem Ellipsoid

Die geographische Breite eines Punktes  $P$  ist der Winkel  $B$ , den die in  $P$  errichtete Flächennormale mit der Äquatorebene bildet. Die geographische Länge ist der Winkel  $L$ , den die Meridianebene des Punktes  $P$  mit der Ebene eines festgelegten Anfangsmeridians (z. B. Greenwich) bildet. Sie kann aber auch auf einen dem Vermessungsgebiet näher liegenden Haupt- oder Nullmeridian ( $L=0, L_0$ ) bezogen werden. Man rechnet dann mit einem geographischen Längenunterschied. Der im Punkt  $P$  gebildete Winkel einer Oberflächenkurve mit dem Meridian wird auch als Azimut  $A$  bezeichnet.

Damit ergeben sich aus der Figur in der Abbildung 26.2 folgende Bezeichnungen:

$x, y, z =$  Hauptachsen des Rotationsellipsoids

$N =$  Nordpol

$OE =$  große Halbachse  $a$

$ON =$  kleine Halbachse  $b$

$B = 0 :$  Äquator ( $B_0$ )

$L = 0 :$  Haupt- oder Nullmeridian ( $L_0$ )

$L_1 = \text{const.} :$  Meridian zu  $P_1$

$B_1 = \text{const.} :$  Breitenkreis zu  $P_1$

$l_1 = L_1 - L_0$

$B_1, B_2 =$  geographische Breite der Punkte  $P_1$  und  $P_2$

$L_1, L_2 =$  geographische Länge der Punkte  $P_1$  und  $P_2$

$A =$  Azimut von  $P_1, P_2$

Nachdem die Orientierung auf dem Ellipsoid geklärt ist, können vielfältige Berechnungen durchgeführt werden. Zur weiteren Vereinfachung werden i.d.R. sphärische Hilfsflächen (z. B. Kugel) und spezielle logarithmische Tafeln von verschiedenen Autoren bereitgestellt, die bei den Bestimmungen der Koordinaten in der Meridianellipse nötig sind. Die Rechnungen wurden i. d. R. mit 7-ziffrigen Logarithmen oder Logarithmen mit 10 Dezimalen durchgeführt. *Bremiker* hat dazu in seiner Ausgabe von Vegas 7-ziffrigen Logarithmen ausgeführt, dass zwar die 10. dezimale der Logarithmen der Zahlen im *Thesaurus log.* sicher, aber nicht die der trigonometrischen Funktionen, wo Fehler bis zu 4 Einheiten vorkommen können. Ferner hat *Bremiker* in seinen Studien über höhere Geodäsie spezielle Tafeln der Logarithmen für bestimmte Ausdrücke mit 8 Dezimalen bei diesen Berechnungen entwickelt. Diesen Weg beschritten auch *Albrecht* und *Börsch*, um die Rechnung zu vereinfachen. *Helmert* fügte seinem Buch [1] eine Logarithmentafel für einen Rechenausdruck mit 10 Dezimalen bei. Insgesamt geht die Nutzung je nach Rechenterm von 5 bis 10-stelligen Logarithmen. Für die trigonometrischen Funktionen im Zusammenhang mit einer Reihenentwicklung wird die Verwendung einer 10-stelligen Tafel empfohlen.

Für die Berechnung von Dreiecken und Dreiecksnetzen auf der Kugel ist die Verwendung logarithmischer Tafeln in der Entwicklungsgeschichte der Landesvermessung nicht wegzudenken.

## Literatur

- [1] Helmert, F. R.: Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, Einleitung und I. Teil: Die mathematischen Theorien, Zweite Auflage, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1962
- [2] Helmert, F. R.: Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, II. Teil: Die physikalischen Theorien, mit Untersuchungen über die mathematische Erdgestalt auf Grund von Beobachtungen, Zweite Auflage, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1962
- [3] Großmann, W.: Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung, zweite, erweiterte Auflage, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart, 1964
- [4] Jordan, W.: Handbuch der Vermessungskunde, Zweiter Band, Feld- und Land-Messung, 3. Auflage, J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1888
- [5] Resnik, Boris und Bill, Ralf: Vermessungskunde für den Planungs-, Bau- und Umweltbereich, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg, 2000
- [6] Witte, Berthold und Schmidt, Hubert: Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen, 4. Auflage, Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart, 2000

Anschrift des Verfassers:

Rainer Heer c/o  
Leibniz Universität Hannover  
Geodätisches Institut  
Nienburger Straße 1  
30167 Hannover